◀1997 年　東京工業大学（前期）▶

1　$a^2x^2+b^2y^2 \leqq 1$ をみたす $(x,\ y)$ がすべて $a(x-1)+b(y-1) \leqq 0$ をみたすような $(a,\ b)$ の範囲を求め，図示せよ．

2

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$ を求めよ．

(2)　任意の正数 a に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{a+k}$ は (1) と同じ極限値をもつことを証明せよ．

3

(1)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$ をみたす自然数 $x,\ y$ の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2)　n を自然数，r を正の有理数とする．このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=r$ をみたす自然数 x_k の組 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ の個数は有限であることを示せ．

4

(1)　底辺の長さが l，2 つの底角が $\alpha,\ \beta$ の三角形の面積 S は，次式で与えられることを示せ．

$$S=\frac{l^2}{4}\cdot\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

(2)　各辺の長さが 1, 2, $\sqrt{3}$ の三角形の各辺に 1 点ずつ頂点をもつ正三角形の面積の最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

1　標準　II　三角関数

2　標準　III　積分法の応用

3　標準　A　整数問題・数列

4　標準　II　三角関数

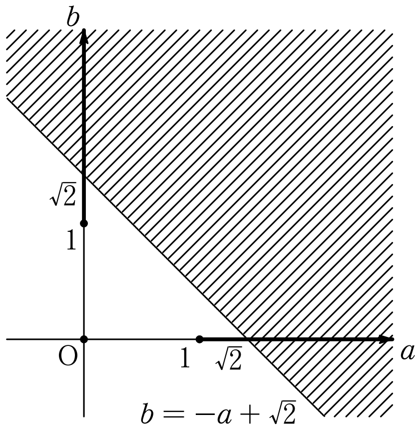
略解

1

$$\begin{cases} a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ のとき，} & b \geqq -a+\sqrt{2} \\ a = 0,\ b \neq 0 \text{ のとき，} & b \geqq 1 \\ a \neq 0,\ b = 0 \text{ のとき，} & a \geqq 1 \\ a = 0,\ b = 0 \text{ のとき，} & \text{常に成り立つ} \end{cases}$$

右図斜線部分および太実線・黒丸が求める領域で，

境界線上の点を含む．



2 （1）$\log 2$

（2）証明は省略

3 （1）$(x,\ y)=(6,\ 3),\ (4,\ 4),\ (3,\ 6)$

（2）証明は省略

4 （1）証明は省略

（2）$\dfrac{3\sqrt{3}}{28}$