◀1996 年　東京工業大学（前期）▶

1　2 以上の整数 n に対して方程式 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=x_1x_2\cdots\cdots x_n$ の正の整数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ を考える．ただし，たとえば $(1,\ 2,\ 3)$ と $(3,\ 2,\ 1)$ は異なる解とみなす．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$n=2$ および $n=3$ のときの解をすべて求めよ．

(2)　解が 1 つしかないような n をすべて求めよ．

(3)　任意の n に対して解は少なくとも 1 つ存在し，かつ有限個しかないことを示せ．

2　$p=\cos\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$q,\ r,\ s$ を正数とする．また，行列 A を $A=\begin{pmatrix} p & -q \\ r & s \end{pmatrix}$ とする．A で表される 1 次変換により，楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（ただし，$a,\ b>0$）上の点は C 上の点にうつるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　行列 A を $\theta,\ a,\ b$ を用いて表せ．

(2)　自然数 n に対し A^n を求めよ．

3　関数 $f(x)=px^7(x-\alpha)(x-\beta)$ が $x=1$ で極値 1 をとり，さらに x 軸と曲線 $y=f(x)$ で囲まれ面積が有限な 2 つの部分の面積が等しいとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$0<\alpha<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ．

(2)　$\alpha<0<\beta$ のとき $f(x)$ を求めよ．

4　関数 $f(x)$ は微分可能で次の（イ），（ロ），（ハ）をみたすものとする．

（イ）　$x\geqq 0$ のとき $f'(x)>0$，

（ロ）　$f(0)=a$（ただし，$a>1$），

（ハ）　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$（$t\geqq 0$）における接線と x 軸との交点を Q，法線と x 軸との交点を R としたとき，線分 QR の長さ $F(t)$ は関係式 $\dfrac{F(t)}{f(t)}=\dfrac{f(t)}{f'(t)}$ をみたす．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x>0$ で $f'(x)$ は単調増加で，$h>0$ に対し

$$f(x+h)-f(x)\geqq\sqrt{a-1}h$$

をみたすことを示せ．

(2)　点 P が曲線 $y=f(x)$（$x\geqq 0$）上を動くとき，$F(t)$ の最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

1　標準　I　整数問題

2　標準　代幾　行列・1 次変換

3　標準　基解　微分積分

4　標準　微積　微分法の応用

略解

1 (1) $n=2$ のとき, $(x_1,\ x_2)=(2,\ 2)$

$n=3$ のとき, $(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1)$

(2) $n=2$

(3) 証明は省略

2 (1) $A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\dfrac{a}{b}\sin\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(2) $A^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\dfrac{a}{b}\sin n\theta \\ \dfrac{b}{a}\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

3 (1) $f(x)=10x^7\left(x-\dfrac{6}{5}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

$f(x)=-98x^7\left(x-\dfrac{6}{7}\right)\left(x-\dfrac{15}{14}\right)$

(2) $f(x)=-\dfrac{7}{2}x^7\left(x^2-\dfrac{9}{7}\right)$

4 (1) 証明は省略

(2) $\begin{cases} 1<a\leqq\dfrac{4}{3} \text{ のとき,} & \dfrac{16}{9}\sqrt{3} \\ a\geqq\dfrac{4}{3} \text{ のとき,} & \dfrac{a^2}{\sqrt{a-1}} \end{cases}$