◀2009 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$${}_m\mathrm{C}_1,\quad {}_m\mathrm{C}_2,\quad \cdots,\quad {}_m\mathrm{C}_{m-1}$$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする．すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である．

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ．

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ．

(3)　m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ．

2　実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 $r,\ s$ が下の条件 (i),（ii),（iii）をみたすとする．

（i）　$s > 1$

（ii）　$A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

（iii）　$A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

このとき以下の問に答えよ．

(1)　$B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を $a,\ c,\ r,\ s$ を用いて表せ．

(2)　$B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0$ を示せ．

(3)　$c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ．

3　スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で出てくる機械がある．2 つの箱 L と R を用意する．次の 3 種類の操作を考える．

（A）　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる．

（B）　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる．

（C）　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる．

(1)　L と R は空であるとする．操作 (A) を 5 回おこない，さらに操作 (B) を 5 回おこなう．このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ．

(2)　L と R は空であるとする．操作 (C) を 5 回おこなう．このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ．

(3)　L と R は空であるとする．操作 (C) を 10 回おこなう．このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする．$\dfrac{P_3}{P_1}$ を求めよ．

4 a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,\,y,\,z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ \ z=a\},$$

$$D_2=\{(x,\,y,\,z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ \ z=-a\}$$

を考える．D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる．ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする．この回転の間に D_1 が通る部分を E とする．E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\,y,\,z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする．

(1)　$W(a)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ．

5

(1)　実数 x が $-1<x<1,\ x\neq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ．

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ．

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

6 平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\,\mathrm{Q})$ と表すことにする．平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ がある．$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ の内部に 3 点 $\mathrm{B_1},\,\mathrm{B_2},\,\mathrm{B_3}$ を，$d(\mathrm{A}_n,\,\mathrm{B}_n)=1\ (n=1,\,2,\,3)$ となるようにとる．また，

$$\vec{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\quad \vec{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\quad \vec{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$

$$\vec{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\quad \vec{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\quad \vec{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく．$n=1,\,2,\,3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発し，$\vec{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする．

(1)　ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t),\,\mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した．ベクトル $\vec{e_1}-\vec{e_2}$ と，ベクトル $\vec{a_1}$ とのなす角度を θ とおく．このとき $|\sin\theta|\leqq \dfrac{1}{1000}$ となることを示せ．

(2)　角度 $\theta_1,\,\theta_2,\,\theta_3$ を $\theta_1=\angle \mathrm{B_1A_1A_2},\ \theta_2=\angle \mathrm{B_2A_2A_3},\ \theta_3=\angle \mathrm{B_3A_3A_1}$ によって定義する．α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ をみたす実数とする．(1) と同じ仮定のもとで，$\theta_1+\theta_2$ の値のとる範囲を α を用いて表せ．

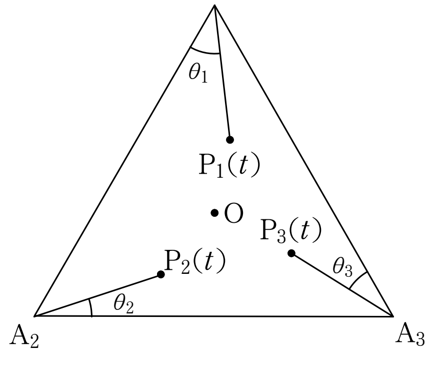
(3)　時刻 $t_1,\,t_2,\,t_3$ のそれぞれにおいて，次が成立した．

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\,\mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\quad d(\mathrm{P_3}(t_2),\,\mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\quad d(\mathrm{P_1}(t_3),\,\mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

このとき，時刻 $T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P_1}(T),\,\mathrm{O})\leqq 3,\quad d(\mathrm{P_2}(T),\,\mathrm{O})\leqq 3,\quad d(\mathrm{P_3}(T),\,\mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ．



♠ 文　科

1　座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし，点 $(1,\,0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．また，点 $(a,\,b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が，C_1 に内接し，かつ C_2 に外接すると仮定する．ただし，b は正の実数とする．

(1)　$a,\,b$ を t を用いて表せ．また，t がとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，b の最大値を求めよ．

2　自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$${}_m\mathrm{C}_1,\quad {}_m\mathrm{C}_2,\quad \cdots,\quad {}_m\mathrm{C}_{m-1}$$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする．すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である．

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ．

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ．

3　理科 **3** と同じ．

4　2 次以下の整式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に対し

$$S = \int_0^2 \left| f'(x) \right| dx$$

を考える．

(1)　$f(0) = 0,\ f(2) = 2$ のとき S を a の関数として表せ．

(2)　$f(0) = 0,\ f(2) = 2$ をみたしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1　難　I 整数問題・A 論証・B 数列

2　やや難　III 数列の極限・C 行列

3　標準　A 確率

4　やや難　III 積分法の応用

5　やや難　II 不等式の証明・III 微分法の応用

6　難　B ベクトル

♣ 文　科

1　標準　II 図形と方程式

2　やや難　I 整数問題・A 論証・B 数列

3　標準　A 確率

4　標準　II 微分積分

略解

◇ 理　科

1 （1）　証明は省略

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

2 （1）

$$B = \begin{pmatrix} a - cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$$

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

3 （1）　$P_1 = \dfrac{225}{4096}$

（2）　$P_2 = \dfrac{15}{64}$

（3）　$\dfrac{P_3}{P_1} = \dfrac{63}{16}$

4 （1）　$W(a) = \dfrac{2}{3}\pi$

（2）　$\displaystyle\lim_{a \to \infty} V(a) = \dfrac{2}{3}\pi$

5 （1）　証明は省略

（2）　証明は省略

6 （1）　証明は省略

（2）　$\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_1 + \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$

（3）　証明は省略

◇ 文　科

1 （1）　$a = -3t + 2, \quad b = 2\sqrt{2t(1-t)}, \quad 0 < t < 1$

（2）　$\sqrt{2} \ \left(t = \dfrac{1}{2}\right)$

2 　理科 **1** の（1),（2）と同じ.

3 　理科 **3** と同じ.

4 （1）

$$S = \begin{cases} -\dfrac{4a^2+1}{2a} & \left(a \leqq -\dfrac{1}{2}\right) \\ 2 & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{4a^2+1}{2a} & \left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

（2）　$2 \ \left(a = \dfrac{1}{2}\right)$