◀2008 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　座標平面の点 (x, y) を $(3x+y, -2x)$ へ移す移動 f を考え，点 P が移る行き先を $f(\mathrm{P})$ と表す．f を用いて直線 $l_0, l_1, l_2, \cdots$ を以下のように定める．

- l_0 は直線 $3x+2y=1$ である．
- 点 P が l_n 上を動くとき，$f(\mathrm{P})$ が描く直線を l_{n+1} とする $(n=0, 1, 2, \cdots)$．

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_nx+b_ny=1$ と表す．

(1)　a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ．

(2)　不等式 $a_nx+b_ny>1$ が定める領域を D_n とする．$D_0, D_1, D_2, \cdots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ．

2　白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (A) を考える．

(A)　手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1), (2) に答えよ．

(1)　最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

(2)　最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

3

(1)　正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く．この八面体を真上から見た図（平面図）を描け．

(2)　正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ とする．$\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする．

4　放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある．線分 PQ の中点の y 座標を h とする．

(1)　線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ．

(2)　L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ．

5　自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{ 個}}$ を $\boxed{n}$ で表す．たとえば $\boxed{1}=1$, $\boxed{2}=11$, $\boxed{3}=111$ である．

(1)　m を 0 以上の整数とする．$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ．

(2)　n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ．

6　座標平面において，媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=t\sin t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ．

♠文　科

1　$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ をみたす実数 α, β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ について，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$$

が成立しているとする．このとき定積分

$$S = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ．

2　白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作（A）を考える．

（A）　手持ちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする．以下の (1), (2) に答えよ．

（1）　操作（A）を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

（2）　操作（A）を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

3　座標平面上の 3 点 A(1, 0), B(−1, 0), C(0, −1) に対し，

$$\angle \mathrm{APC} = \angle \mathrm{BPC}$$

をみたす点 P の軌跡を求めよ．ただし P $\neq$ A, B, C とする．

4　p を自然数とする．次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える．

$$\begin{cases} a_1 = p,\ b_1 = p+1 & \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n & (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

（1）　$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ．

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\quad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

（2）　p を 3 以上の奇数とする．このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1 標準　II 図形と方程式・B 数列・C 1次変換

2 標準　A 確率

3 やや難　I 空間図形・III 積分法の応用

4 標準　II 微分積分

5 やや難　I 整数問題

6 標準　III 積分法の応用

♣ 文　科

1 標準　II 微分積分

2 標準　A 確率

3 標準　II 図形と方程式

4 標準　I 整数問題・B 数列

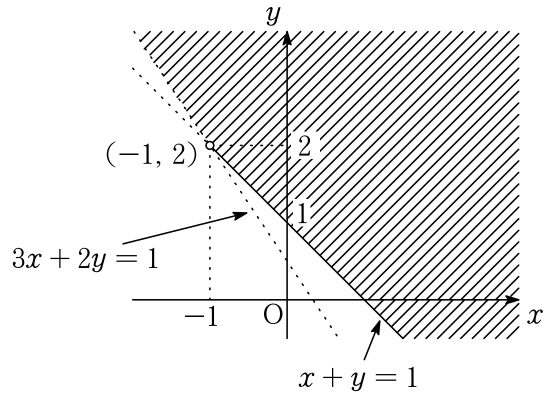
略解

◇ 理　科

1 (1) $\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$

(2) 求める領域は右図の斜線部分で，

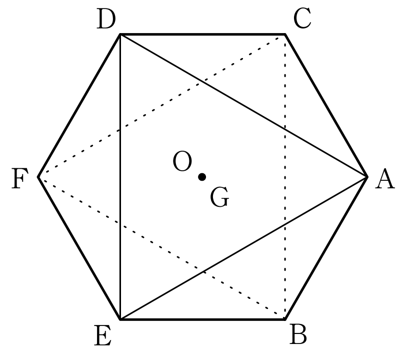
境界は $x > -1$ の部分のみ含む．



2 (1) $\begin{cases} n \text{ が奇数のとき} & 0 \\ n \text{ が偶数のとき} & \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} n \text{ が偶数 または } 1 \text{ のとき} & 0 \\ n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数のとき} & \frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}} \end{cases}$

3 (1) 正八面体の平面図は右図のようになる．



(2) $\frac{5\sqrt{6}}{54}\pi$

4 (1) $h = \frac{1}{4}\left(m^2 + \frac{L^2}{1+m^2}\right)$

(2) $\begin{cases} 0 < L \leqq 1 \text{ のとき} & \frac{L^2}{4} \\ 1 < L \text{ のとき} & \frac{2L-1}{4} \end{cases}$

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

6 $\frac{32}{9}$

◇ 文　科

1 $S = -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{12}\alpha$

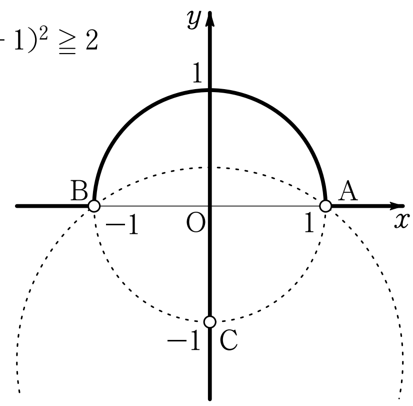
S の最大値 ： $\frac{1}{18\sqrt{6}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

2 (1) $\frac{3}{16}$

(2) $\begin{cases} n \text{ が奇数のとき} & 0 \\ n \text{ が偶数のとき} & \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} \end{cases}$

3 $\begin{cases} 「x = 0 \text{ または } y = 0 \text{ または } x^2 + y^2 = 1」\text{かつ } x^2 + (y+1)^2 \geqq 2 \\ (x,\ y) \neq (\pm 1,\ 0),\ (0,\ -1) \end{cases}$

右図の太実線部分で，白丸を除く．



4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略