◀1998 年　東京大学（前期）▶

♠ 理　科

1　a は 0 でない実数とする．関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ．

2　n を正の整数とする．連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leqq n \\ -x+y-z \leqq n \\ x-y-z \leqq n \\ -x-y+z \leqq n \end{cases}$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で，$x,\ y,\ z$ がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく．極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ．

3　xy 平面に 2 つの円

$$C_0\ :\ x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad C_1\ :\ (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

をとり，C_2 を x 軸と $C_0,\ C_1$ に接する円とする．さらに，$n=2,\ 3,\ \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と $C_{n-1},\ C_n$ に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする．C_n の半径を r_n，C_n と x 軸の接点を $(x_n,\ 0)$ として，

$$q_n=\frac{1}{\sqrt{2r_n}},\quad p_n=q_nx_n$$

とおく．

(1)　q_n は整数であることを示せ．

(2)　p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ．

(3)　α を $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式

$$|x_{n+1}-\alpha|<\frac{2}{3}|x_n-\alpha|$$

を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ．

4　実数 a に対して $k \leqq a < k+1$ をみたす整数 k を $[a]$ で表す．n を正の整数として，

$$f(x)=\frac{x^2(2\cdot 3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}$$

とおく．$36n+1$ 個の整数

$$[f(0)],\ [f(1)],\ [f(2)],\ \cdots,\ [f(36n)]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ．

5　θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする．xy 平面にベクトル

$$\vec{a}=(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

をとり，点 $\mathrm{P}_n,\ \mathrm{Q}_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - (\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - (\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\right\} \end{cases}$$

で定める．ただし，O は原点で，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す．$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = (x_n,\ y_n)$ とおく．数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ．さらに，このような θ に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

を求めよ．

6　xyz 空間に 5 点 A(1, 1, 0), B(−1, 1, 0), C(−1, −1, 0), D(1, −1, 0), P(0, 0, 3) をとる．四角錐 PABCD の

$$x^2 + y^2 \geqq 1$$

をみたす部分の体積を求めよ．

♠文　科

1　理科 **1** と同じ．

2　a, b は実数で $b \neq 0$ とする．xy 平面に原点 O(0, 0) および 2 点 P(1, 0), Q(a, b) をとる．

(1)　△OPQ が鋭角三角形となるための a, b の条件を不等式で表し，点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ．

(2)　m, n を整数とする．a, b が (1) で求めた条件をみたすとき，不等式

$$(m+na)^2 - (m+na) + n^2b^2 \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．

3

(1)　x は $0^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ をみたす角とする．

$$\begin{cases} \sin y = |\sin 4x| \\ \cos y = |\cos 4x| \\ 0^\circ \leqq y \leqq 90^\circ \end{cases}$$

となる y を x で表し，そのグラフを xy 平面上に図示せよ．

(2)　α は $0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ をみたす角とする．$0^\circ \leqq \theta_n \leqq 90^\circ$ をみたす角 θ_n, $n = 1,\ 2,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} \theta_1 = \alpha \\ \sin\theta_{n+1} = |\sin 4\theta_n| \\ \cos\theta_{n+1} = |\cos 4\theta_n| \end{cases}$$

で定める．k を 2 以上の整数として，$\theta_k = 0^\circ$ となる α の個数を k で表せ．

4　xyz 空間に 3 点 A(1, 0, 0), B(−1, 0, 0), C(0, $\sqrt{3}$, 0) をとる．△ABC を 1 つの面とし，$z \geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる．さらに，△ABD を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる．

(1) 点 E の座標を求めよ.

(2) 正四面体 ABDE の $y \leqq 0$ の部分の体積を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理　科

1. 標準　II 微分積分
2. 標準　A 数列・III 数列の極限
3. 標準　A 数列・III 数列の極限
4. やや難　I 整数問題・III 微分法
5. 標準　A 数列・B ベクトル（平面）
6. 標準　B 空間図形・III 積分法の応用

♣ 文　科

1. 標準　II 微分積分
2. 標準　II 図形と方程式
3. 標準　II 三角関数・A 数列
4. 標準　B 空間座標

略解

◇ 理　科

1　$a=\pm 1$

2　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{8}{3}$

3　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

4　$26n+1$（個）

5　$\theta=0$ または $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ または $\theta=\pi$ または $\dfrac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{11}{6}\pi$

$$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi \text{ のときは，} & \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1,\ \lim_{n\to\infty}y_n=-\sqrt{3}\\ \theta=\dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi \text{ のときは，} & \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=-\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \text{その他のときは，} & \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0,\ \lim_{n\to\infty}y_n=0\end{cases}$$

6　$4+4\sqrt{2}-3\pi$

◇ 文　科

1　理科 **1** と同じ．

2　(1)　右上図

(2)　証明は省略

3　(1)　右下図

(2)　$2\cdot 4^{k-2}+1$

4　(1)　$\mathrm{E}\left(0,\ -\dfrac{7\sqrt{3}}{9},\ \dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

(2)　$\dfrac{7\sqrt{2}}{15}$