◀2016 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部（医学部保健学科看護学専攻を除く）

1　鋭角三角形 △ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす．これらの垂線は垂心 H で交わる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ．

(2)　∠ADE = ∠ADF であることを示せ．

2　以下の問いに答えよ．

(1)　6 以上の整数 n に対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ．

(2)　等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

3　サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$a,\ b,\ c$ がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ．

(2)　$a,\ b,\ c$ がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ．

4　多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める．ただし，i は虚数単位とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき，係数 $a_0,\ \cdots\cdots,\ a_7$ をすべて求めよ．

(2)　$0 < \theta < \pi$ に対して，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ．

(3)　(1) で求めた $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7$ を用いて，多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える．$\theta = \dfrac{\pi}{7}$ として，$k = 1,\ 2,\ 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく．このとき，$Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し，$x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ．

5　空間内に，直線 ℓ で交わる 2 平面 $\alpha,\ \beta$ と交線 ℓ 上の 1 点 O がある．さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも点 O を通り，ℓ に垂直にとる．$m,\ n$ 上にそれぞれ点 P, Q があり，

$$\mathrm{OP} = \sqrt{3},\quad \mathrm{OQ} = 2,\quad \mathrm{PQ} = 1$$

であるとする．線分 PQ 上の動点 T について，$\mathrm{PT} = t$ とおく．点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ．

(2)　S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく．T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

6　関数

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t|\,dt$$

の区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ．

♠ 文系学部・医（保健学科看護学専攻）

1　平面上で原点 O と 3 点 A(3, 1), B(1, 2), C(−1, 1) を考える．実数 s, t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1)　s, t が条件

$$-1 \leqq s \leqq 1, \quad -1 \leqq t \leqq 1, \quad -1 \leqq s+t \leqq 1$$

を満たすとき，点 $\mathrm{P}(x, y)$ の存在する範囲 D を図示せよ．

(2)　点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ．

2　放物線 $C : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ．

(2)　a, b を実数とする．関数 $y = -2|x-a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ．

(3)　(2) で求めた領域 D の面積を求めよ．

3　ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個，9 個，12 個使っている．出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ，ネジが全部で 54 個あった．残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として，可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ．

4　理系学部 **1** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 基本　A 平面図形
- **2** 標準　A 整数の性質・B 数列
- **3** 基本　A 確率
- **4** 標準　III 複素数平面
- **5** 標準　B 空間図形
- **6** 標準　III 積分法

♣ 文系学部

- **1** 標準　II 図形と方程式・B ベクトル（平面）
- **2** やや難　II 図形と方程式・II 微分積分
- **3** 基本　A 整数の性質
- **4** 基本　A 平面図形

略解

◇ 理系学部

1 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

2 （1） 証明は省略

（2） $(p,\ q)=(2,\ 5)$

3 （1） $\dfrac{1}{36}$

（2） $\dfrac{13}{72}$

4 （1） $a_0=0,\ a_1=7,\ a_2=0,\ a_3=-35,\ a_4=0,\ a_5=21,\ a_6=0,\ a_7=-1$

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略．$x_1+x_2+x_3=5$

5 （1） $\pi(2-t^2)$

（2） 最大値：$\dfrac{25}{7}\pi \ \left(t=\dfrac{3}{7}\right)$

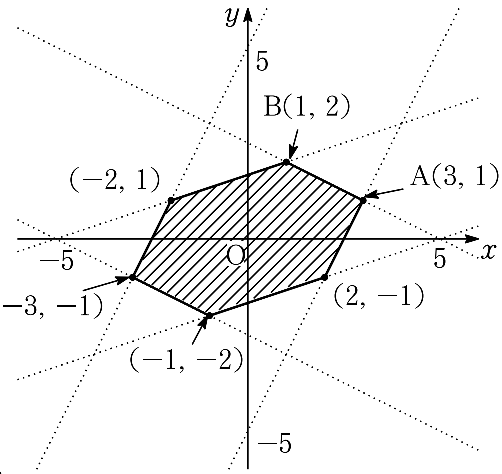
6 最大値：$4\ \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$

最小値：$\dfrac{5}{2}\ (x=0,\ \pi)$

◇ 文系学部

1 （1） 領域 D は右図斜線部分で境界線上の点を含む．

$$D:\begin{cases} 2x-5\leqq y\leqq 2x+5 \\ \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3}\leqq y\leqq \dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

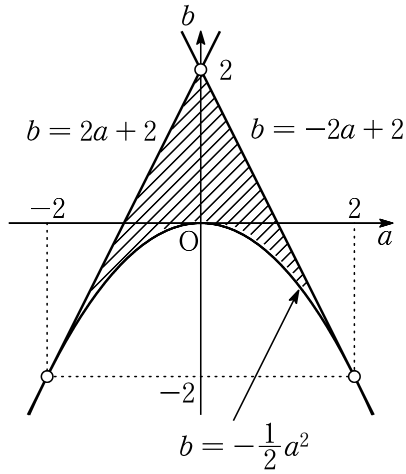


（2） 最大値：3　P$(-2,\ 1)$

2 （1） $k\leqq 2$

（2） 領域 D は右図斜線部分で境界線上の点を含まない．

（3） $\dfrac{8}{3}$



3 $(l,\ m,\ n)=(0,\ 6,\ 0),\ (6,\ 0,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (0,\ 2,\ 3)$

4 理系学部 **1** と同じ．