

◀2009年 東北大学(前期)▶

♠ 理系学部

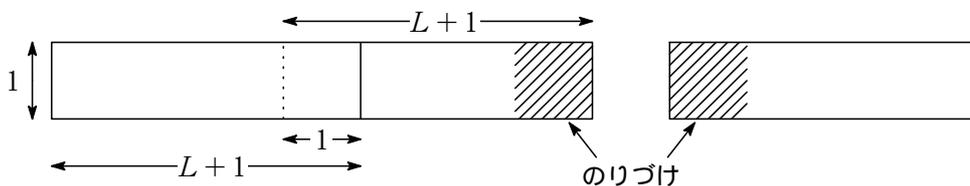
注：理・工・医(医)・歯・薬学部は 1~6 を解答。医(医以外)・農学部は, 1~4 を解答。

1 a, b, c を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $a + b = c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つことを示せ。
- (2) $a + b \geq c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つことを示せ。

2 L を 2 以上の自然数, a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。縦 1 cm, 横 $(L + 1)$ cm の長方形の紙を用いて, 次のように長方形 A, B を作る。

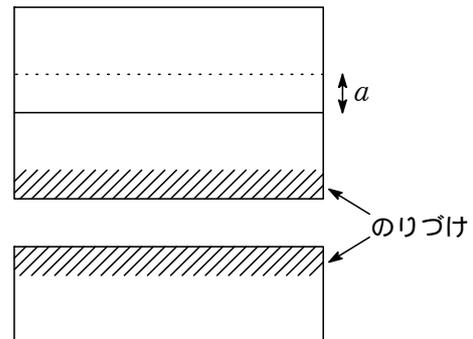
長方形 A の作り方. L 枚の紙を横に並べて, 順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして (隣り合う紙が横 1cm 重なるように) はり合わせ, 縦 1 cm の横長の長方形を作る。



長方形 B の作り方. L 枚の紙を縦に並べて, 隣り合う紙が縦 a cm 重なるようにはり合わせて, 横 $(L + 1)$ cm の長方形を作る。

長方形 A, B の面積をそれぞれ S_1 cm² および S_2 cm² とおくと, 以下の問いに答えよ。

- (1) S_1 と S_2 を求めよ。
- (2) $L = 2$ のとき, $S_1 - 1 < S_2$ となる a の範囲を求めよ。
- (3) $S_1 - 1 < S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ。



3 袋の中に青玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして, 以下の問いに答えよ。

- (1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。
- (2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。
- (3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。
- (4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

4 a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 θ に対して $\sin \theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく。すなわち,

$$\sin \theta \geq \sin(\theta - 2a) \text{ のとき } f(\theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta < \sin(\theta - 2a) \text{ のとき } f(\theta) = \sin(\theta - 2a)$$

となる関数 $f(\theta)$ を考える。このとき定積分

$$I = \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta$$

を求めよ。

(2) a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき, (1) の I の最大値を求めよ.

5 a, b, c, d, p, q は $ad - bc > 0, p > 0, q > 0$ を満たす実数とする. 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と

$P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ が $APA = P^2$ を満たすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $P^3 A = AP^3$ が成り立つことを示せ.
- (2) A を p と q で表せ.

6 実数 a に対して, x の方程式

$$|x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1 = 0$$

が, 相異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ.

♠ 文系学部

1 すべての実数 x に対して不等式

$$2^{2x+2} + 2^x a + 1 - a > 0$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ.

2 辺 AB の長さが 1, $\angle A$ が直角となる三角形 $\triangle ABC$ がある. 辺 BC 上を点 C から点 B まで動く点 D を考え, 内積 $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$ を t とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1) t の動く範囲を求めよ.
- (2) $\vec{AD} \cdot \vec{AC} = \vec{CD} \cdot \vec{CA}$ が成り立つとき, t の値を求めよ.

3 袋の中に青玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている. 袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す. 一度取り出した玉は袋に戻さないとして, 以下の問いに答えよ.

- (1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ.
- (2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ.
- (3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ.

4 不等式 $2y > x + 1 + 3|x - 1|$ が表す座標平面上の領域を D とする. 実数 a に対して, 放物線 C を $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ で定める. このとき, C 上の点 P がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1 標準 II 式と証明
- 2 標準 I 方程式と不等式
- 3 標準 A 確率
- 4 標準 III 微分法の応用・積分法
- 5 難 C 行列
- 6 難 III 微分法の応用

♣ 文系学部

- 1 基本 II 指数関数
- 2 基本 B ベクトル(平面)
- 3 標準 A 確率
- 4 標準 II 図形と方程式

略解

◇ 理系学部

- 1** (1) 証明は省略
(2) 証明は省略
- 2** (1) $S_1 = L^2 + 1, S_2 = (1-a)L^2 + L + a$
(2) $0 < a < \frac{2}{3}$
(3) $0 < a < \frac{2}{3}$
- 3** (1) $\frac{1}{8}$
(2) $\frac{7}{15}$
(3) $\frac{7}{40}$
(4) $\frac{6}{5}$
- 4** (1) $I = 2 \sin a + \cos 2a + 1$
(2) $\frac{5}{2} \quad (a = \frac{\pi}{6})$
- 5** (1) 証明は省略
(2) $A = \pm \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$
- 6** $-\frac{1}{8} < a < 0, \frac{2}{9} < a < \frac{1}{4}, 3 + \sqrt{7} < a$

◇ 文系学部

- 1** $-8 - 4\sqrt{5} < a \leq 1$
- 2** (1) $0 \leq t \leq 1$
(2) $t = \frac{1}{2}$
- 3** 理系学部 **3** の (1)~(3) と同じ
- 4** (1) $\frac{1}{8} < a < 2$