◀2008 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部

✏注：理・工・医（医）・歯・薬学部は, **1**～**6** を解答. 医（医以外）・農学部は, **1**～**4** を解答.

1 多項式 $f(x)$ について, 次の条件 (i), (ii), (iii) を考える.

(i) $x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$

(ii) $f(1-x) = f(x)$

(iii) $f(1) = 1$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 条件 (i) をみたす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ.

(2) 条件 (i), (ii), (iii) をすべてみたす多項式 $f(x)$ を求めよ.

2 n を 2 以上の自然数とする. 平面上の $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ は $\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90^\circ$, $\mathrm{OA_1} = 1$, $\mathrm{A_1A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ をみたすとする. $\mathrm{A_2}$ から $\mathrm{OA_1}$ へ垂線をおろし, 交点を $\mathrm{A_3}$ とする. $\mathrm{A_3}$ から $\mathrm{OA_2}$ へ垂線をおろし, 交点を $\mathrm{A_4}$ とする. 以下同様に, $k = 4, 5, \cdots$ について, A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし, 交点を A_{k+1} として, 順番に $\mathrm{A_5}, \mathrm{A_6}, \cdots$ を定める. $\vec{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $k = 1, 2, \cdots$ のとき, ベクトル $\vec{h_k}$ と $\vec{h}_{k+1}$ の内積 $\vec{h_k}\cdot\vec{h}_{k+1}$ を n と k で表せ.

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \vec{h_k}\cdot\vec{h}_{k+1}$ とおくとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ. ここで, 自然対数の底 e について, $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい.

3 θ を $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし, 空間の 4 点 O, A, B, C が, OA = OB = OC = 1 かつ $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \theta$ をみたすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\triangle$ABC の重心を G とするとき, AG と OG をそれぞれ θ で表せ.

(2) θ を動かしたとき, O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ.

4 点 P が次のルール (i), (ii) に従って数直線上を移動するものとする.

(i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り, 出た目の数を k とする. P の座標 a について, $a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し, $a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する.

(ii) 原点に移動したら終了し, そうでなければ (i) を繰り返す.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) P の座標が 1, 2, ⋯, 6 のいずれかであるとき, ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ.

(2) P の座標が 1, 2, ⋯, 6 のいずれかであるとき, ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ.

(3) P の座標が 8 であるとき, ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ.

5 a を実数として, 2 次の正方行列 A, B を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2 & -a \end{pmatrix}$$

このとき, $((\cos t)A + (\sin t)B)^2 = O$ をみたす実数 t が存在するような a の範囲を求めよ. ただし, O は

零行列とする．

6　$k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく．曲線 $y=f(x)$ と円 $C: x^2+y^2=1$ の 2 つの交点の内で，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする．点 O$(0,0)$, A$(1,0)$, B$(-1,0)$ に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$, $\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1)　k を α で表せ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形の内で，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　a を実数とし，

$$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$$

とおく．方程式 $f(x)=0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a の値の範囲を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ．

(3)　a が (1) で求めた範囲を動くとき，$y=f(x)$ の極大値をあたえる x について，点 $(x, f(x))$ が xy 平面上にえがく図形を図示せよ．

2　a, b, c, d, e を実数とする．多項式

$$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

が次の条件 (ｉ), (ii), (iii) をすべてみたすとき，a, b, c, d, e の値を求めよ．

(ｉ)　$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$

(ii)　$f(1-x)=f(x)$

(iii)　$f(1)=1$

3　平面上の $\triangle\mathrm{OA_1A_2}$ は $\angle\mathrm{OA_2A_1}=90^\circ$, $\mathrm{OA_1}=1$, $\mathrm{OA_2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をみたすとする．$\mathrm{A_2}$ から $\mathrm{OA_1}$ へ垂線をおろし，交点を $\mathrm{A_3}$ とする．$\mathrm{A_3}$ から $\mathrm{OA_2}$ へ垂線をおろし，交点を $\mathrm{A_4}$ とする．以下同様に，$k=4, 5, \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし，交点を A_{k+1} として，順番に $\mathrm{A_5}, \mathrm{A_6}, \cdots$ を定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ $(k=1, 2, \cdots)$ を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{h_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を求めよ．ただし，$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ は $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積を表す．

4　点 P が次のルール (ｉ), (ii) に従って数直線上を移動するものとする．

(ｉ)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする．P の座標 a について，$a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し，$a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する．

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ (ｉ) を繰り返す．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　P の座標が 1, 2, ⋯, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 2 回サイコロを振って原点で終了する確率を求

めよ．

（2）　Pの座標が $1, 2, \cdots, 6$ のいずれかであるとき，ちょうど3回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ．

（3）　Pの座標が7であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　II 式と証明

2 標準　B ベクトル・III 数列の極限

3 標準　II 微分積分

4 標準　A 確率

5 標準　II 三角関数・C 行列

6 標準　II 図形と方程式・微分積分・III 関数の極限

♣ 文系学部

1 標準　II 微分積分

2 標準　II 式と証明

3 標準　B 数列・ベクトル

4 標準　A 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

2 (1) $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} = -\dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = -1 + \frac{1}{e}$

3 (1) $\mathrm{AG} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\theta}{2}$,　$\mathrm{OG} = \sqrt{1 - \dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

(2) $\dfrac{1}{6}$

4 (1) $\dfrac{25}{216}$

(2) $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}$

(3)
$$\begin{cases} n = 1 \text{ のとき} & 0 \\ n = 2 \text{ のとき} & \dfrac{5}{36} \\ n \geqq 3 \text{ のとき} & \dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3} \end{cases}$$

5 $a \leqq -1,\ -\dfrac{1}{3} \leqq a$

6 (1) $k = \dfrac{\sin\alpha - \cos^2\alpha}{2\cos\alpha}$

(2) $S(k) = \dfrac{1}{2}(\pi - \alpha + \beta) + \dfrac{1}{6}\cos^3\alpha + \dfrac{1}{6}\cos^3\beta$

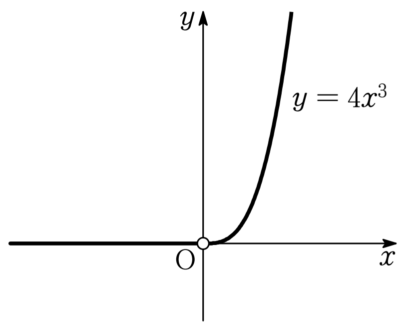
(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} S(k) = \frac{\pi}{2}$

◇ 文系学部

1 (1) $a<2,\ 2<a$

(2)
$$\begin{cases} a<2 \text{ のとき　極大値 } \dfrac{4}{27}(2-a)^3\text{，極小値 } 0 \\ a>2 \text{ のとき　極大値 } 0\text{，極小値 } \dfrac{4}{27}(2-a)^3 \end{cases}$$

(3) 右図の太実線部分.



2 $a = 1,\ b = -2,\ c = 3,\ d = -2,\ e = 1$

3 (1) $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1} = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right\}$

4 (1) $\dfrac{5}{36}$

(2) $\dfrac{25}{216}$

(3)
$$\begin{cases} n = 1 \text{ のとき} & 0 \\ n \geqq 2 \text{ のとき} & \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2} \end{cases}$$