◀1998 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部

1

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ．

(2)　(1) の $f(x)$, $g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx=bf(b)-af(a)$$

2　2 次正方行列 $X=\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$ に対し，$s+v$ を X のトレースという．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ と A^2 のトレースがともに -1 であるとする．

(1)　$A^3=E$ を示せ．ただし，E は単位行列である．

(2)　連立 1 次方程式 $(A+E)^4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ を解け．

3　ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面（底面）の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(1)　a_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(3)　b_n を n の式で表し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

4　a と b は $\pm1, 0$ でない実数とする．実数 x, y が，$\dfrac{\sin x}{\sin y}=a$, $\dfrac{\cos x}{\cos y}=b$ をみたしているとする．

(1)　$\tan^2 y$ を a, b を用いて表せ．

(2)　点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

5　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつとき，点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面に図示せよ．

6

(1)　点 $\mathrm{P}(p, q)$ と円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ (r>0)$ との距離 d とは，P と C 上の点 (x, y) との距離の最小値をいう．P が C の外部にある場合と内部にある場合に分けて，d を表す式を求めよ．

(2)　2 つの円 $C_1:(x+4)^2+y^2=81$ と $C_2:(x-4)^2+y^2=49$ から等距離にある点 P の軌跡の方程式を求めよ．

♠ 文系学部

➾注：**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．

1　2 つの曲線 $y=x^2$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+3$ で囲まれた図形を S とする．ただし，S は境界を含むものとする．

（1）　S の面積を求めよ．

（2）　直線 $y=x+k$ が，S と共通部分をもつための k の範囲を求めよ．

2　$0<a<b$ とし，$m,\ n$ を自然数とする．$f(m)=\log\dfrac{a^m+b^m}{2}$, $g(m)=\dfrac{\log(a^m)+\log(b^m)}{2}$ とする．このとき，$f(m+n)$, $f(m)+f(n)$, $g(m+n)$, $g(m)+g(n)$ を大きさの順に並べよ．ただし，対数は常用対数とする．

3　2 点 A(4, 0), B(0, 2) を考える．線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が $\angle\mathrm{OPB}=\angle\mathrm{QPA}$（O：原点）をみたしている．直線 OP の傾きを m として，Q の x 座標を m を用いて表せ．

4　白玉 3 個，赤玉 4 個があるとし，同じ色の玉は区別できないものとする．

（1）　上の 7 個を 2 つの区別のついた袋 A, B に分けて入れる．入れる方法は何通りあるか．ただし，いずれの袋にも 7 個のうち少なくとも 1 個は入れるものとする．

（2）　6 段の引き出しのついたタンスが 2 つあり，その中に上記の玉 7 個を分けて入れたい．ただし，どの引き出しにも 1 個しか入れないものとする．各タンスの引き出しは上から何段目か区別がつくが，2 つのタンスは区別しないものとすれば，入れる方法は何通りあるか．

5　実数の数列 $\{a_n\}$ が，$a_{3n}=a_n$, $a_{n+5}=a_n$, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$, $a_1a_3a_5=8$ をみたすとき，

（1）　a_1, a_5 の値を求めよ．

（2）　数列の和 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　III 関数・積分法

2　標準　C 行列

3　やや難　I 確率・A 数列

4　標準　II 図形と方程式・三角関数

5　標準　I 2 次関数

6　やや難　II 図形と方程式

♣ 文系学部

1　基本　II 微分積分

2　標準　II 指数関数・対数関数

3　標準　II 図形と方程式

4　基本　I 場合の数

5　標準　A 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$

(2) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 (1) $a_2=\dfrac{1}{2}$

(2) $a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+1$

(3) $b_n=\dfrac{1}{6}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ $(n\geqq 1)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{6}$

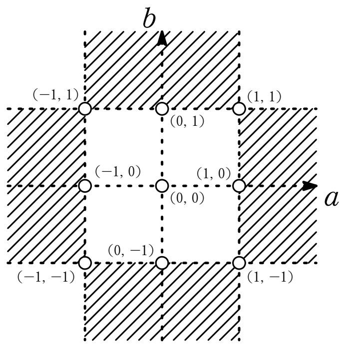
4 (1) $\tan^2 y=\dfrac{b^2-1}{1-a^2}$

(2) $\begin{cases} a^2-1<0 \\ b^2-1>0 \end{cases}$ または $\begin{cases} a^2-1>0 \\ b^2-1<0 \end{cases}$

ただし, $a\neq\pm1,\ b\neq\pm1,\ a\neq0,\ b\neq0$

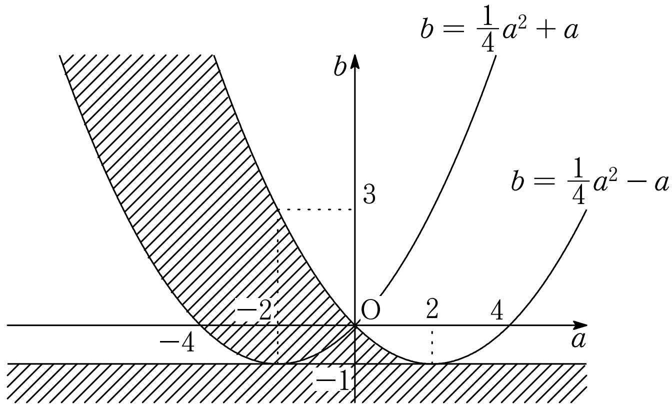
点 (a, b) の存在範囲は右図の

斜線部分で境界線上の点は含まない.



5
$$\begin{cases} a<-2 \text{ のとき} & b<-1 \text{ または } \dfrac{1}{4}a^2+a<b<\dfrac{1}{4}a^2-a \\ -2\leqq a\leqq 0 \text{ のとき} & b<\dfrac{1}{4}a^2-a \\ 0\leqq a\leqq 2 \text{ のとき} & b<\dfrac{1}{4}a^2-a \\ a>2 \text{ のとき} & b<-1 \end{cases}$$

点 (a, b) の存在範囲は下図の斜線部分で境界線上の点は含まない.



6 (1) P が C の外部にある場合 …… $d=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}-r$

P が C の内部にある場合 …… $d=r-\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}$

(2) 双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$ $(x>0)$ または 楕円 $\dfrac{x^2}{8^2}+\dfrac{y^2}{48}=1$

◇ 文系学部

1 (1) $\dfrac{27}{4}$

(2) $-\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{25}{8}$

2 $f(m+n) > f(m)+f(n) > g(m)+g(n) = g(m+n)$

3 $\dfrac{16-8m}{3m+4}$

4 (1) 18 (通り)

(2) 13860 (通り)

5 (1) $a_1 = -1,\quad a_5 = 8$

(2) m は 0 以上の整数とする

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n = \begin{cases} 4m-1 & (n = 5m+1 \text{ のとき}) \\ 4m-2 & (n = 5m+2 \text{ のとき}) \\ 4m-3 & (n = 5m+3 \text{ のとき}) \\ 4m-4 & (n = 5m+4 \text{ のとき}) \\ 4m & (n = 5m+5 \text{ のとき}) \end{cases}$$