◀1997 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　空間の 2 定点 O(0, 0, 0), A(−1, 1, 1) に対し，点 P(x, y, z) は次の 2 条件（ｉ），（ii）をみたしながら動くとする．

（ｉ）　点 P は，方程式 $y = 2x$ で与えられる平面上にある．

（ii）　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は垂直である．

このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の長さの最小値と，その最小値を与える P の座標 (x, y, z) を求めよ．

2　1 個のさいころを振って，出た目の 2 乗を得点とする．この試行を 3 回行ったとき，得点の合計が 80 点以上になる確率を求めよ．

3

(1)　$\log x$ を x の自然対数とする．このとき，関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ の極値，および $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点を求め，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2)　a を正の数とする．不等式 $a^x \geqq x^a$ が，$x \geqq a$ である任意の x に対して成り立つような，a の範囲を求めよ．

4　a を定数とし，2 次曲線 $y = (x-a)^2 - 4$ の $x \geqq a$ をみたす部分を E とする．4 点 A(0, 0), B(4, 0), C(4, 4), D(0, 4) を頂点とする正方形の面積を，E が 2 等分するとき，a の値を求めよ．

5　xy 平面上の 2 つの曲線 $y = x^2 + 1$, $y = \left|\dfrac{(x+1)(x-a)}{2}\right|$ が共有点をもたないとき，実数 a の存在する範囲を求めよ．

6　関数 $f(x) = x^3\sqrt{1-x^2}$ $(|x| \leqq 1)$ を考える．

(1)　$f(x)$ の最大値と最小値を求め，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2)　$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

♠ 文系学部

1　2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が 2 つの解を持ち，かつその差が 1 であるとする．

(1)　b を a で表せ．

(2)　2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフが，領域 $2x + y<0$ を通らないような a の範囲を求めよ．

2

(1)　等式 $(1+\sin\theta+\cos\theta)^2 = 2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　θ の関数 $(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)$ の $0^\circ \leqq \theta<360^\circ$ の範囲での最大値および最小値を求めよ．

3

(1)　直線 $y = x-1$ は，2 つの 2 次曲線 $y = x(x-1)$, $y = x^2 - 3x + 3$ に接することを示せ．

(2)　直線 $y = x-1$ と，2 つの 2 次曲線 $y = x(x-1)$, $y = x^2 - 3x + 3$ により囲まれる部分の面積を求

めよ.

4　1 個のサイコロを n 回投げて, 5 以上の目が少なくとも 1 回出る確率を 0.9995 以上にするための n の最小値を求めよ. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

5

(1)　2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が相異なる 2 つの解 α, β をもつとき, 定数 p, q に対し,

$$x_0 = p + q, \quad x_n = p\alpha^n + q\beta^n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく. このとき次の等式が成り立つことを示せ.

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

(2)　$x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で与えられる数列の一般項は

$$x_n = \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

で与えられることを示せ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　基本　B　ベクトル
- **2**　基本　I　確率
- **3**　標準　III　微分法の応用
- **4**　標準　II　微分積分
- **5**　標準　I　２次関数
- **6**　基本　III　微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

- **1**　基本　I　２次関数・II　図形と方程式
- **2**　基本　II　三角関数
- **3**　基本　II　微分積分
- **4**　基本　I　確率・II　指数関数・対数関数
- **5**　標準　A　数列

略解

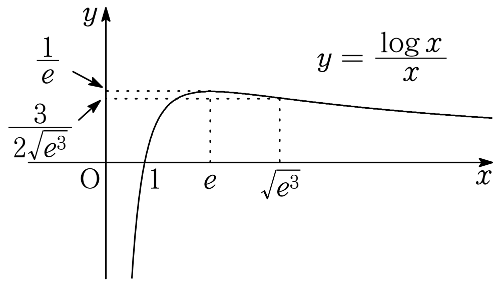
◇ 理系学部

1 　$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{5}{2}\right)$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ の最小値は $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2 　$\dfrac{13}{216}$

3 （1）極大値 $\dfrac{1}{e}$ $(x=e)$，x 軸との交点 $(1,\ 0)$

グラフの概形は右図.



（2）$a \geqq e$

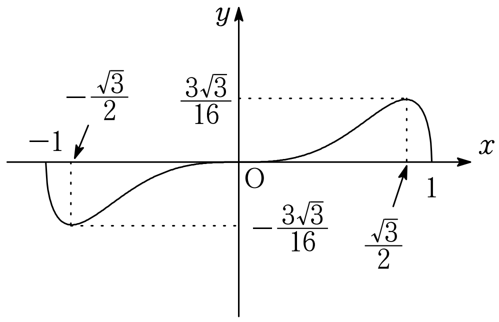
4 　$a=\dfrac{10-8\sqrt{2}}{3}$

5 　$-1<a<-5+4\sqrt{3}$

6 （1）

$$\begin{cases} \text{最大値} \quad \dfrac{3\sqrt{3}}{16} \quad \left(x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \text{最小値} \quad -\dfrac{3\sqrt{3}}{16} \quad \left(x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

グラフの概形は右図.



（2）$S=\dfrac{4}{15}$

◇ 文系学部

1 （1）$b=\dfrac{a^2-1}{4}$

（2）$a \leqq -\dfrac{5}{4}$

2 （1）証明は省略

（2）

$$\begin{cases} \text{最大値} \quad \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2} \quad (\theta=45^\circ) \\ \text{最小値} \quad 0 \quad (\theta=180^\circ,\ 270^\circ) \end{cases}$$

3 （1）証明は省略

（2）$\dfrac{1}{12}$

4 　19

5 （1）証明は省略

（2）証明は省略