◀1996 年　東北大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　3 次関数 $f(x)=x^3-px$ は $x=a$ において極大値 b をとるとする．点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を原点を中心に正の向きに 90° 回転した点を Q とする．曲線 $y=f(x)$ が点 Q を通るような p の値を求めよ．

2　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とし，行列 $A,\ E$ を $A=\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta \\ \cos^2 2\theta & \sin^2 2\theta \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ によって定める．

(1)　行列 $A-tE$ の逆行列が存在しないとき，t を求めよ．

(2)　(1) で求めた t がすべて正の数となるような θ の範囲を求めよ．

3　xy 平面の点 $(0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とし，第 1 象限にあって x 軸と C に接する円 C_1 を考える．次に，x 軸，$C,\ C_1$ で囲まれた部分にあって，x 軸とこれら 2 円に接する円を C_2 とする．以下同様に，$C_n\ (n=2,\ 3,\ \cdots)$ を x 軸，$C,\ C_{n-1}$ で囲まれた部分にあって，これらに接する円とする．

(1)　C_1 の中心の x 座標を a とするとき，C_1 の半径 r_1 を a を用いて表せ．

(2)　C_n の半径 r_n を a と n を用いて表せ．

4　2 つのさいころを同時に振るという試行を独立に 3 回行う．1 回目に出た目を $a_1,\ b_1$, 2 回目に出た目を $a_2,\ b_2$, 3 回目に出た目を $a_3,\ b_3$ とする．

(1)　$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=0$ となる確率を求めよ．

(2)　$(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)=100$ となる確率を求めよ．

5　直線 l は曲線 $C_1 : y=e^x,\ C_2 : y=e^{ax}\ (a>1)$ の両方に接するとする．

(1)　l と C_1 との接点 P の x 座標を s とし，l と C_2 との接点 Q の x 座標を t とする．このとき，$s,\ t$ を a を用いて表せ．

(2)　$a=2$ のとき l と $C_1,\ C_2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

6　点 $(7,\ 6,\ 4)$ を中心とする半径 3 の球があり，その表面は鏡でできているものとする．いま，方向ベクトル $(3,\ 2,\ 1)$ をもつ光が原点から発射されたとする．この光は球面のどの点で反射し，xy 平面とどの点で交わるか．ただし，球面での光の反射はその点での法線と入射光線を含む平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．

♠ 文系学部

1　直線 $y=ax+b$ はだ円 $4x^2+y^2=4$ と相異なる 2 点で交わり，これらの交点の y 座標はともに正であるという．このような $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ．

2　$\overrightarrow{p_1}=(1,\ 0)$ とする．ベクトル $\overrightarrow{p_n}$ に対し，これを正の向きに角 θ だけ回転し，さらにその大きさを α 倍したベクトルを $\overrightarrow{p_{n+1}}$ とする．ただし，$0<\alpha<1,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とする．

(1)　$\overrightarrow{p_n}$ と同じ向きをもつ単位ベクトル $\overrightarrow{e_n}$ を求めよ．

(2)　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{99}\overrightarrow{p_n}$ を求めよ．

3　球面 $S:(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=1$ と点 $\mathrm{P}(-1,6,3)$ が与えられている．点 P を通り球面 S に接するすべての直線からなる図形と S との共通部分として定まる円を C とする．円 C の中心 A の座標および半径 r を求めよ．また，円 C を含む平面 α の方程式を求めよ．

4　3 次関数 $f(x)=x^3-6ax^2+bx+1$ は $x=a$ において極大値をとるという．ただし，a は正の実数で b は実数とする．

(1)　b および極大値 $f(a)$ を a を用いて表せ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ および直線 $y=f(a)$ によって囲まれた部分の面積が a^2 に等しいとき，a の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　基解　微分積分
- **2**　標準　基解　三角関数・代幾　行列
- **3**　標準　基解　数列
- **4**　標準　確統　確率
- **5**　標準　微積　微分法の応用・積分法の応用
- **6**　標準　代幾　直線・平面・球の方程式

♣ 文系学部

- **1**　標準　代幾　いろいろな曲線
- **2**　標準　基解・代幾　数列・1 次変換
- **3**　標準　代幾　平面・球の方程式
- **4**　標準　基解　微分積分

略解

◇ 理系学部

1　$p=\frac{3}{4}\sqrt{6+2\sqrt{17}}$

2　(1)　$t=1,\ 3\sin^2\theta-4\sin^4\theta$

(2)　$0<\theta<\frac{\pi}{3}$

3　(1)　$r_1=\frac{1}{4}a^2$

(2)　$r_n=\left(\frac{a}{2+a(n-1)}\right)^2$

4　(1)　$\frac{91}{216}$

(2)　$\frac{1}{216}$

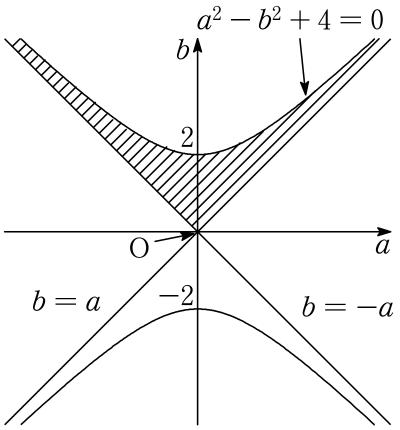
5　(1)　$s=1-\frac{1}{a-1}\log a$,　$t=\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}\log a$

(2)　$\frac{3}{16}e-\frac{1}{2}$

6　光の反射点 P(6, 4, 2)，xy 平面との交点 $\mathrm{Q}\left(\frac{20}{3},\ \frac{8}{3},\ 0\right)$

◇ 文系学部

1　下図の斜線部分で境界線上の点は含まない．



2　(1)　$\vec{e_n}=\begin{pmatrix}\cos(n-1)\theta\\ \sin(n-1)\theta\end{pmatrix}$

(2)　$\sum_{n=1}^{99}\vec{p_n}=\frac{1-\alpha^{99}}{1-\alpha^3}\begin{pmatrix}1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2\end{pmatrix}$

3　$\mathrm{A}\left(\frac{26}{9},\ \frac{19}{9},\ \frac{19}{18}\right)$，　$r=\frac{\sqrt{35}}{6}$，　$\alpha:4x-4y-2z-1=0$

4　(1)　$b=9a^2$,　$f(a)=4a^3+1$

(2)　$a=\frac{2\sqrt{3}}{9}$