◀2015 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$a>0,\ b>0$ とする．xy 平面において，原点を通る傾き正の直線が，直線 $y=-a$ と交わる点を P とし，直線 $x=b$ と交わる点を Q とする．P の x 座標を p とし，線分 PQ の長さを L とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　L^2 を $a,\ b,\ p$ を用いて表せ．

(2)　$a,\ b$ を定数とし，p を $p<0$ の範囲で変化させるとき，L^2 を最小にする p の値を求めよ．

(3)　(2) で求めた p の値を p_0 とする．また，c を $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ を満たす正の実数とする．$p=p_0$ のときの L^2 の値を c を用いて表せ．

2　関数 $f(x),\ g(x)$ を $f(x)=e^{-x}\sin x,\ g(x)=e^{-x}\cos x$ とおく．$f(x),\ g(x)$ の不定積分を $I=\displaystyle\int f(x)\,dx,\ J=\int g(x)\,dx$ とおく．k を自然数とし，$(k-1)\pi \leqq x \leqq k\pi$ において，2 つの曲線 $y=f(x),\ y=g(x)$，および，2 直線 $x=(k-1)\pi,\ x=k\pi$ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を S_k とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$I=J+F(x)+C_1,\ J=-I+G(x)+C_2$ を満たす関数 $F(x),\ G(x)$ を求めよ．ただし，$C_1,\ C_2$ は積分定数である．

(2)　$I,\ J$ を求めよ．

(3)　S_k を求めよ．

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ．

3　1 枚の硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う．ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$P_2,\ P_3,\ P_4$ を求めよ．

(2)　P_{n+1} を P_n および P_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 3$ とする．

(3)　$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{P_n}{2} \leqq P_{n+1} \leqq P_n$ が成り立つことを示せ．

4　O を原点とする座標空間内に点 A$(0,\ 0,\ 1)$, B$(1,\ 0,\ 1)$, C$(1,\ 1,\ 1)$ が与えられている．線分 OC を 1 つの対角線とし，線分 AB を一辺とする立方体を直線 OC の周りに回転して得られる回転体 K の体積を求めたい．次の問いに答えよ．

(1)　点 P$(0,\ 0,\ p)$ $(0<p \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 H の座標と線分 PH の長さを求めよ．

(2)　点 Q$(q,\ 0,\ 1)$ $(0 \leqq q \leqq 1)$ から直線 OC へ垂線を引いたときの交点 I の座標と線分 QI の長さを求めよ．

(3)　原点 O から点 C 方向へ線分 OC 上を距離 u $(0 \leqq u \leqq \sqrt{3})$ だけ進んだ点を U とする．点 U を通り直線 OC に垂直な平面で K を切ったときの切り口の円の半径 r を u の関数として表せ．

(4)　K の体積を求めよ．

♠ 文系学部

1　座標平面上に 2 点 P(0, 2), Q(1, 0) をとる．また，t を実数とし，放物線 $y=(x-t)^2$ を C とする．次の問いに答えよ．

(1)　C が P を通るときの t の値を求めよ．

(2)　C が直線 PQ に接するときの t の値と接点の座標を求めよ．

(3)　線分 PQ と C の共有点の個数が t によりどのように変化するか記述せよ．

2　O を原点とする座標空間において四面体 OABC を考える．△ABC の重心を O′, △OBC の重心を A′, △OCA の重心を B′, △OAB の重心を C′ とする．次の問いに答えよ．

(1)　2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}$ は平行であることを示せ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ と $\left|\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}\right|$ の比を求めよ．

(3)　△OAB と △O′A′B′ は相似であることを示せ．

(4)　A が P(1, 0, 0) と Q(0, 2, 0) を結ぶ線分の中点，B が Q と R(0, 0, 3) を結ぶ線分の中点，C が R と P を結ぶ線分の中点であるとき，四面体 OABC の体積 V と四面体 O′A′B′C′ の体積 V' を求めよ．

3　$m>0$ とする．座標平面上の点 P に対して，P を通る傾き m の直線と y 軸の交点を R とし，点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=m\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ となるように定める．次の問いに答えよ．

(1)　P の座標を (a,b) とするとき，Q の座標を m, a, b を用いて表せ．

(2)　点 P が放物線 $y=x^2-x$ 上を動くとき，対応する点 Q の軌跡を C とする．C の方程式を $y=f(x)$ とするとき，$f(x)$ を求めよ．

(3)　(2) の $f(x)$ に対し，$I(m)=\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$ とする．m を $m>0$ の範囲で変化させるとき，$I(m)$ を最小にする m の値を求めよ．

4　1 枚の硬貨を何回も投げ，表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う．ちょうど n 回投げた時点で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　P_2 を求めよ．

(2)　P_3 を求めよ．

(3)　P_4 を求めよ．

(4)　$P_5<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　II 微分積分

2　標準　III 数列の極限・積分法

3　標準　A 確率・B 数列

4　やや難　III 積分法の応用

♣ 文系学部

1　標準　I ２次関数

2　やや難　B ベクトル（空間）

3　基本　II 図形と方程式・III 積分法の応用

4　基本　A 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $L^2=(b-p)^2\left(1+\dfrac{a^2}{p^2}\right)$

(2) $p=-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$

(3) $L^2=c^2$

2 (1) $F(x)=-e^{-x}\sin x$,　$G(x)=-e^{-x}\cos x$

(2) $I=-\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C_3$,　$J=\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C_4$　(C_3, C_4 は積分定数)

(3) $S_k=\sqrt{2}e^{-k\pi+\frac{3}{4}\pi}$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi}}{e^{\pi}-1}$

3 (1) $P_2=\dfrac{1}{4}$,　$P_3=\dfrac{1}{8}$,　$P_4=\dfrac{1}{8}$

(2) $P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_n+\dfrac{1}{4}P_{n-1}$

(3) 証明は省略

4 (1) $\mathrm{H}\left(\dfrac{p}{3},\ \dfrac{p}{3},\ \dfrac{p}{3}\right)$,　$\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}p$

(2) $\mathrm{I}\left(\dfrac{1+q}{3},\ \dfrac{1+q}{3},\ \dfrac{1+q}{3}\right)$,　$\mathrm{QI}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{q^2-q+1}$

(3) $$r=\begin{cases}\sqrt{2}u & \left(0\leqq u\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\\ \sqrt{2(u^2-\sqrt{3}u+1)} & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\ \sqrt{6}-\sqrt{2}u & \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leqq u\leqq\sqrt{3}\right)\end{cases}$$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

◇ 文系学部

1 （1）$t=\pm\sqrt{2}$

（2）$t=\dfrac{3}{2}$，接点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

（3）$\begin{cases} t<-\sqrt{2},\quad \dfrac{3}{2}<t \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ -\sqrt{2}\leqq t<\sqrt{2},\quad t=\dfrac{3}{2} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ \sqrt{2}\leqq t<\dfrac{3}{2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$

2 （1）証明は省略

（2）$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{O'A'}}\right| = 3 : 1$

（3）証明は省略

（4）$V=\dfrac{1}{4},\quad V_0=\dfrac{1}{108}$

3 （1）$\mathrm{Q}(ma,\ m^2a-ma+b)$

（2）$f(x)=\dfrac{1}{m^2}x^2+\left(m-1-\dfrac{1}{m}\right)x$

（3）$m=\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$

4 （1）$P_2=\dfrac{1}{4}$

（2）$P_3=\dfrac{1}{8}$

（3）$P_4=\dfrac{1}{8}$

（4）証明は省略