◀2012 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　t を正の定数とする．次の問いに答えよ．

(1)　正の実数 x に対して定義された関数 $g(x) = e^x x^{-t}$ について，$g(x)$ の最小値を t を用いて表せ．

(2)　すべての正の実数 x に対して $e^x > x^t$ が成り立つための必要十分条件は，$t < e$ であることを示せ．

2　三角形 ABC の頂点 A, B, C は反時計回りに並んでいるものとする．点 P はいずれかの頂点の位置にあり，1 枚の硬貨を 1 回投げるごとに，表が出れば時計回りに隣の頂点へ，裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ，移動するものとする．点 P は最初，頂点 A の位置にあったとする．硬貨を n 回投げたとき，点 P が頂点 A の位置に戻る確率を a_n で表す．次の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 2$ に対し a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

(2)　a_n を求めよ．

3　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で二つの曲線 $y = \sin x$ と $y = k\cos x$ を考える．ただし，$k > 0$ とする．この二つの曲線の交点の x 座標を $\alpha, \beta\ (0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi)$ とし，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲でこの二つの曲線に囲まれた図形の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1)　k と β を α を用いて表せ．

(2)　S を k を用いて表せ．

(3)　$S = 4$ のとき，$\alpha \leqq x \leqq \theta$ の範囲でこの二つの曲線に囲まれた図形の面積が 2 となるような θ の値を求めよ．

4　$|a^2 - 2b^2| = 1$ をみたす整数 a, b によって，$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ と表される 2 次の正方行列全体の集合を U とする．このとき，U に属する行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ に対して，$f(A) = a + \sqrt{2}b$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　二つの行列 A と B が U に属するならば，積 AB も U に属することを示し，さらに $f(AB) = f(A)f(B)$ が成り立つことを示せ．

(2)　U に属する行列 $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$ について，$f(A) \geqq 1$ ならば，$-1 \leqq a - \sqrt{2}b \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(3)　U に属する行列 A について，$1 \leqq f(A) < 1 + \sqrt{2}$ ならば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

(4)　U に属する行列 A について，$1 + \sqrt{2} \leqq f(A) < (1 + \sqrt{2})^2$ ならば，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

♠ 文系学部

1　0 以上の実数 t に対し，$F(t) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - t^2|\,dx$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$F(t)$ を t を用いて表せ．

(2)　$t \geqq 0$ において，関数 $F(t)$ が最小値をとるときの t の値を求めよ．

2　実数 θ に対し，座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \sin 2\theta,\ \cos 2\theta)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1)　点 A, B と原点 O の 3 点は同一直線上にないことを示せ．

(2)　三角形 OAB の面積 S を $\sin\theta$ を用いて表せ．

(3)　θ が実数全体を動くとき，(2) で求めた S の最大値と最小値を求めよ．

3　理系学部 **2** と同じ．

4　xy 平面において，x 軸の $x<0$ である部分を C_1，x 軸の $x>1$ である部分を C_2 とする．また，2 点 $(0,\ -1)$, $(1,\ -1)$ を結ぶ線分を K とする．$y>0$ をみたす点 $(x,\ y)$ からは，C_1 と C_2 が障害となり，C_1 と C_2 の間を通してしか，K は見えないものとする．点 $(s,\ 1)$ から見える K の部分の長さを $f(s)$，点 $(2,\ t)$ $(t>0)$ から見える K の部分の長さを $g(t)$ とおく．ただし，K がまったく見えないとき，または，K の 1 点のみが見えるとき，$f(s)$, $g(t)$ の値は 0 とする．次の問いに答えよ．

(1)　$f(s)$ を求めよ．また，s が実数全体を動くとき，関数 $f(s)$ のグラフを描け．

(2)　$g(t)$ を求めよ．また，t が正の実数全体を動くとき，関数 $g(t)$ のグラフを描け．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　基本　III 微分法の応用
- **2**　標準　A 確率・B 数列
- **3**　標準　III 積分法の応用
- **4**　標準　I 整数問題・C 行列

♣ 文系学部

- **1**　標準　II 微分積分
- **2**　標準　II 三角関数・微分積分・B ベクトル（空間）
- **3**　標準　A 確率・B 数列
- **4**　標準　II 図形と方程式

略解

◇ 理系学部

1 （1）　最小値：$e^t t^{-t}$

（2）　証明は省略

2 （1）　$a_n = \frac{1}{2}(1 - a_{n-1})$　$(n \geqq 2)$

（2）　$a_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

3 （1）　$k = \tan\alpha$,　$\beta = \alpha + \pi$

（2）　$S = 2\sqrt{k^2+1}$

（3）　$\theta = \frac{5}{6}\pi$

4 （1）　証明は省略

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

（4）　証明は省略

◇ 文系学部

1 （1）

$$F(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3} & (0 \leqq t < 1) \\ t^2 - \frac{1}{3} & (1 \leqq t) \end{cases}$$

（2）　$t = \frac{1}{2}$

2 （1）　証明は省略

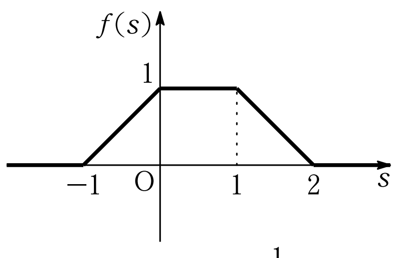
（2）　$S = \frac{1}{2}\sqrt{4\sin^6\theta - 4\sin^4\theta + 1}$

（3）　最大値：$\frac{1}{2}$，　最小値：$\frac{\sqrt{33}}{18}$

3 　理系学部 **2** と同じ．

4 （1）　グラフは，右図太線部分になる．

$$f(s) = \begin{cases} 0 & (s < -1) \\ s+1 & (-1 \leqq s < 0) \\ 1 & (0 \leqq s < 1) \\ -s+2 & (1 \leqq s < 2) \\ 0 & (2 \leqq s) \end{cases}$$



（2）　グラフは，右図太線部分になる．

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t \leqq 1) \\ 1 - \frac{1}{t} & (1 < t) \end{cases}$$