◀2010 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　2 次正方行列 X, Y が共に逆行列をもてば，積 XY も逆行列をもつことを示せ.

(2)　すべての実数 s について，$A + sE$ は逆行列をもつことを示せ.

(3)　すべての実数 t について，$A^2 + 3tA + 2t^2E$ は逆行列をもつことを示せ.

2　確率 p で表が出るコインが 2 枚ある．それらを A, B とする．X さんは表が 2 回出るまでコイン A を投げ続け，Y さんは表が 3 回出るまでコイン B を投げ続ける．次の問いに答えよ．

(1)　A の裏がちょうど k 回出る確率 a_k を p と k を用いて表せ.

(2)　B の裏がちょうど k 回出る確率 b_k を p と k を用いて表せ.

(3)　A の裏が出る回数と B の裏が出る回数の和が 3 である確率 c を p を用いて表せ.

3　関数 $f(x) = \sin 2x + 3\sin x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　導関数 $f'(x)$ の最大値，最小値を求めよ.

(2)　a を定数として，$g(x) = f(x) - ax$ と定義するとき，$g(x)$ が極値をもつような a の値の範囲を求めよ.

4　a, b は $a < b$ をみたす実数とする．$f(x), g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数で，$g(x) \leqq f(x)$ をみたすとする．座標平面上，不等式 $a \leqq x \leqq b$，$g(x) \leqq y \leqq f(x)$ をみたす点 (x, y) 全体からなる図形を A とする．A の面積 S が正のとき，A の重心の y 座標は，$\dfrac{1}{S}\displaystyle\int_a^b \dfrac{\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2}{2}\,dx$ で与えられる．この事実を用いて，次の問いに答えよ．

(1)　r は $0 < r < 1$ をみたす実数とする．不等式 $r^2 \leqq x^2 + y^2 \leqq 1$，$y \geqq 0$ をみたす点 (x, y) 全体からなる図形を B とおく．B の重心の y 座標 $Y(r)$ を r を用いて表せ.

(2)　t は正の実数とする．不等式 $-1 \leqq x \leqq 1$，$\sqrt{1-x^2} - t \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}$ をみたす点 (x, y) 全体からなる図形を C とおく．C の重心の y 座標 $Z(t)$ を t を用いて表せ.

(3)　(1) で得られた $Y(r)$ と (2) で得られた $Z(t)$ について，$\displaystyle\lim_{r \to 1-0} Y(r)$ と $\displaystyle\lim_{t \to +0} Z(t)$ の大小を比較せよ.

♠ 文系学部

1　正の実数からなる 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は，$n \geqq 3$ について $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$, $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n-2}}$ をみたすものとする．次の問いに答えよ．

(1)　$\{a_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると，$\{c_n\}$ は等比数列になることを示し，その公比を求めよ.

(2)　$n \geqq 3$ について a_n を a_1, a_2, n を用いて表せ.

(3)　$b_1 = 1, b_2 = 2$ のとき，$n \geqq 3$ について $\log_2 b_n$ を n を用いて表せ.

2　実数 r に対し，$n \leqq r < n+1$ となる整数 n を $[\,r\,]$ と表すことにする．正の整数 m について，$f(m) = [\,m - \log_2(m+1)\,]$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$m + 1 = 2^s$ となる整数 s があれば，$f(m+1) = f(m)$ となることを示せ.

(2)　$m + 1 = 2^s$ となる整数 s がなければ，$f(m+1) = f(m) + 1$ となることを示せ.

3　a, b を正の実数とし，座標平面上の放物線 $C: y = ax^2 + b$ を考える．t, s は正の実数とし，点 P $(t, at^2 + b)$ における C の接線を ℓ_{P}，点 Q$(s, as^2 + b)$ における C の接線を ℓ_{Q} で表す．ℓ_{P} は原点を通っているとする．次の問いに答えよ．

(1)　ℓ_{P} の傾きが 1 未満となるための必要十分条件を，a と b を用いて表せ．

(2)　ℓ_{P} の傾きは 1 未満とし，ℓ_{P} と x 軸がなす鋭角を θ と表す．Q を ℓ_{Q} と x 軸のなす鋭角が 2θ になるようにとるとき，ℓ_{Q} の傾きを a と b を用いて表せ．

(3)　a, b が $a + b = \dfrac{1}{2}$ をみたすとき，ℓ_{P} の傾きは 1 未満であることを示せ．

(4)　a, b は $a + b = \dfrac{1}{2}$ をみたすものとし，Q を (2) のようにとる．ℓ_{Q} の傾きが最大になるような a, b を求めよ．

4　理系学部 **2** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　|標準|　[C] 行列

2　|標準|　[A] 確率

3　|基本|　[III] 微分法の応用

4　|標準|　[III] 積分法の応用

♣ 文系学部

1　|標準|　[II] 指数関数・対数関数・[B] 数列

2　|やや難|　[I] 整数問題・[II] 指数関数・対数関数

3　|標準|　[II] 微分積分

4　|標準|　[A] 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

2 (1)　$a_k = (k+1)p^2(1-p)^k$

(2)　$b_k = \dfrac{(k+2)(k+1)}{2}p^3(1-p)^k$

(3)　$c = 35p^5(1-p)^3$

3 (1)　最大値：5，最小値：$-\dfrac{41}{16}$

(2)　$-\dfrac{41}{16} < a < 5$

4 (1)　$Y(r) = \dfrac{4(r^2+r+1)}{3\pi(r+1)}$

(2)　$Z(t) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}t$

(3)　$\displaystyle\lim_{r\to 1-0} Y(r) < \lim_{t\to +0} Z(t)$

◇ 文系学部

1 (1)　証明は省略．公比：$-\dfrac{1}{2}$

(2)　$a_n = \dfrac{1}{3}\left\{(a_1+2a_2) - 2(a_2-a_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

(3)　$\log_2 b_n = \dfrac{2}{3}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

2 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

3 (1)　$2\sqrt{ab} < 1$

(2)　$\dfrac{4\sqrt{ab}}{1-4ab}$

(3)　証明は省略

(4)　$a = b = \dfrac{1}{4}$

4 　理系学部 **2** と同じ．