◀2008 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　a は実数とする．直線 $y=ax$ に関する対称移動を表す行列を求めよ．

(2)　点 P を，直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ に関して対称移動し，さらに直線 $y=-3\sqrt{3}x$ に関して対称移動したときの点を Q とする．点 P を点 Q に移す移動は，原点を中心とする回転であることを示し，その回転角を求めよ．

2　AB $=$ AC, BC $=2$ である $\triangle$ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とする．AB $=t$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　r を t を用いて表せ．

(2)　R を t を用いて表せ．

(3)　$\dfrac{r}{R}$ の値が最も大きくなるときの t の値と，そのときの $\dfrac{r}{R}$ の値を求めよ．

3　$\triangle$ABC において，辺 BC, CA, AB のそれぞれの長さを $a,\ b,\ c$ とする．

$$K=2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-a^2$ を示せ．

(2)　$K=-(a^2+b^2+c^2)$ を示せ．

(3)　$3K\leqq-(a+b+c)^2$ を示せ．また，この不等式において等号が成立するとき，$\triangle$ABC はどのような三角形か．

4　e は自然対数の底とする．$f(x)=x(e-e^x)$ とし，曲線 $y=f(x)$ の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とする．$h(x)=g(x)-f(x)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$g(x)$ を求めよ．

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$h'(x)\leqq 0,\quad h(x)\geqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3)　0 でない実数 a に対し，

$$\int_0^1 x^2e^{ax}\,dx$$

を求めよ．

(4)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲において，2 つの直線 $y=g(x),\ x=0$ および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

♠ 文系学部

1　次の問いに答えよ．

（1）　実数 x, y に対し

$$(1+x)(1+y) \leqq \left(1+\frac{x+y}{2}\right)^2$$

を示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか．

（2）　a, b, c, d を -1 以上の数とするとき

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \leqq \left(1+\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$$

を示せ．また，等号が成立するのはどのようなときか．

2　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$, $\mathrm{BC}=2$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の面積を S とする．$\mathrm{AB}=t$ とするとき，次の問いに答えよ．

（1）　S を t を用いて表せ．

（2）　$S \geqq \pi$ を示せ．また，$S=\pi$ となるときの t の値を求めよ．

3　理系学部 **3** と同じ．

4　k は定数とする．$f(x)=2x^3+3kx^2-6x-2k$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする．次の問いに答えよ．

（1）　$\alpha\beta$ の値を求めよ．また，$\alpha+\beta$ を k を用いて表せ．

（2）　$f(x)$ を $\dfrac{1}{6}f'(x)$ で割った余りを求めよ．

（3）　$f(\alpha)f(\beta)$ を k を用いて表せ．

（4）　$f(x)=0$ は異なる 3 個の実数解をもつことを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　C 行列・1 次変換

2　標準　I 図形と計量

3　標準　B ベクトル

4　標準　III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

1　標準　II 式と証明

2　標準　I 図形と計量

3　標準　B ベクトル

4　標準　II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\dfrac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}$

(2) 証明は省略．$\dfrac{2}{3}\pi$

2 (1) $r=\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t+1}$

(2) $R=\dfrac{t^2}{2\sqrt{t^2-1}}$

(3) $t=2$ のとき，$\dfrac{r}{R}=\dfrac{1}{2}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略．正三角形

4 (1) $g(x)=-e(x-1)$

(2) 証明は省略

(3) $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{a^3}\right)e^a-\dfrac{2}{a^3}$

(4) $\left(\dfrac{7}{4}e^2-4e+\dfrac{1}{4}\right)\pi$

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略．等号は $x=y$ のとき，成立する．

(2) 証明は省略．等号は $a=b=c=d$ のとき，成立する．

2 (1) $S=\dfrac{\pi t^4}{4(t^2-1)}$

(2) 証明は省略．$t=\sqrt{2}$

3 理系学部 **3** と同じ．

4 (1) $\alpha+\beta=-k$，$\alpha\beta=-1$

(2) $-(k^2+4)x-k$

(3) $-2k^4-11k^2-16$

(4) 証明は省略