◀2002 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の極限が有限の値となるように定数 a, b を定め，そのときの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

2　関数 $f(x)=axe^{-x}+b$ に対して，曲線 $C : y=f(x)$ を考える．ただし，a, b は定数で，e は自然対数の底である．曲線 C は点 $\mathrm{P}(2, -1)$ を通り，この点において C と楕円 $x^2+2y^2=6$ とは共通接線 $\ell : y=g(x)$ をもつとする．次の問いに答えよ．

(1)　a, b の値および $g(x)$ を求めよ．

(2)　$x<2$ のとき $f(x)>g(x)$ であることを示せ．

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，曲線 C と直線 ℓ および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

3　空間内に 4 点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$, $\mathrm{A}(2, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 2, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 2)$ がある．線分 AB の中点を D とし，線分 OC の中点を E とする．線分 OA 上に点 $\mathrm{P}(p, 0, 0)$ $(0<p<2)$ をとり，平面 PDE と線分 BC の交点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 Q の座標を p を用いて表せ．

(2)　線分 PQ の中点は，直線 DE 上にあることを示せ．

(3)　四角形 PDQE の面積を p の式で表せ．

4　実数を成分とする 2 次の正方行列 A, X と $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について，$JA=AX$ が成立しているとする．次の問いに答えよ．

(1)　A が逆行列をもつとき，$X^2+E=O$ であることを示せ．ただし，E は単位行列，O は零行列を表す．

(2)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$A'=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ のとき，$A'JA$ および $A'J^2A$ を計算せよ．

(3)　A が逆行列をもたないとき，$A=O$ であることを示せ．

♠ 文系学部

1　1 辺の長さが 1 の正六角形の 6 つの頂点から，異なる 3 点を無作為に選び，それらを頂点とする三角形 T を作る．次の問いに答えよ．

(1)　三角形 T が直角三角形である確率を求めよ．

(2)　三角形 T の周の長さの期待値を求めよ．

2　一般に，曲線 C 上の点 P における接線に垂直で点 P を通る直線を，点 P における C の法線と呼ぶ．2 つの放物線 $C_1 : y=x^2$, $C_2 : y=-\frac{1}{2}(x-9)^2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ における C_1 の法線 ℓ_1 の方程式，および点 $\mathrm{B}\left(b+9, -\frac{1}{2}b^2\right)$ における C_2 の法線 ℓ_2 の方程式を求めよ．ただし，$a\neq 0$, $b\neq 0$ とする．

(2)　上の ℓ_1 と ℓ_2 が一致するとき，a, b の値を求め，そのときの線分 AB の長さを計算せよ．

3　関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

(2)　点 $(0,\ k)$ から曲線 $y = f(x)$ に引くことができる接線の本数を，k の値によって調べよ．

4　複素数平面において四角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ を考える．ただし，この四角形の頂点は左まわり（反時計まわり）に $\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2},\ \mathrm{P_3},\ \mathrm{P_4}$ の順に並んでいるものとする．また，これらの頂点を表す複素数をそれぞれ $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　四角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ が正方形のとき $\dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$ の値を求めよ．

(2)　四角形 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ が正方形になるための必要十分条件は

$$\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{z_2 - z_3}{z_3 - z_4} = \frac{z_3 - z_4}{z_4 - z_1} = \frac{z_4 - z_1}{z_1 - z_2}$$

であることを証明せよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　III　関数の極限

2　標準　III　微分法・積分法の応用

3　標準　B　ベクトル（空間）

4　標準　C　行列

♣ 文系学部

1　標準　I　確率

2　標準　II　微分積分

3　標準　II　微分積分

4　標準　B　複素数と複素数平面

略解

◇ 理系学部

1 $a=4,\ b=-1$

極限値：$-\dfrac{15}{8}$

2 (1) $a=-e^2,\ b=1,\ g(x)=x-3$

(2) 証明は省略

(3) $9-e^2$

3 (1) $\mathrm{Q}(0,\ p,\ 2-p)$

(2) 証明は省略

(3) $\sqrt{2p^2-2p+2}$

4 (1) 証明は省略

(2) $A'JA=\begin{pmatrix} 0 & -(ad-bc) \\ ad-bc & 0 \end{pmatrix}$,　$A'J^2A=-\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$

(3) 証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) $\dfrac{3}{5}$

(2) $\dfrac{12+6\sqrt{3}}{5}$

2 (1) $\ell_1 : y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$,　$\ell_2 : y=\dfrac{1}{b}x-\dfrac{1}{2}b^2-\dfrac{9}{b}-1$

(2) $a=1,\ b=-2$,　$\mathrm{AB}=3\sqrt{5}$

3 (1) $y=(3t^2+4t-4)x-2t^3-2t^2$

(2) $\begin{cases} -\dfrac{8}{27}<k<0 \text{ のとき} & 3 \text{ 本} \\ k=-\dfrac{8}{27},\ 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \\ k<-\dfrac{8}{27},\ \ 0<k \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \end{cases}$

4 (1) $-i$

(2) 証明は省略