◀2001 年　大阪市立大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　2 次曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ と $xy=k$ $(k>0)$ が第 1 象限に共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致するとき，k およびその共有点の座標 $(x_1,\ y_1)$ を $a,\ b$ を用いて表せ．

2　空間内に 4 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 2,\ -1)$, $\mathrm{D}(0,\ 2,\ 1)$ がある．

(1)　点 C から直線 AB に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2)　点 P が xy 平面上を動き，点 Q が直線 AB 上を動くとき，距離 DP, PQ の和 DP＋PQ が最小となる P, Q の座標を求めよ．

3　次の問いに答えよ．e は自然対数の底とする．

(1)　自然数 n に対して，$K_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$ とおくとき，$K_1,\ K_2,\ K_3$ を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=xe^x$ と 2 次関数 $g(x)=ax^2+bx+c$ $(a,\ b,\ c$ は定数$)$ に対して，定積分

$$I=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$$

を考える．$f(x),\ g(x)$ が $f(0)=g(0),\ f(1)=g(1)$ を満たすとき，I は a の 2 次式 pa^2+qa+r （$p,\ q,\ r$ はいずれも $a,\ b,\ c$ に関係しない定数）で表される．このとき，$p,\ q$ の値を求め，さらに I を最小にする a の値を求めよ．ただし，r の値および I の最小値は求めなくてよい．

4　xy 平面上で，y 軸と定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ （ただし，$a>0$）からの距離の比が $a:1$ となるような点 P の軌跡を考える．

(1)　点 P の軌跡の方程式を求め，a がどのような値のときにその軌跡は双曲線，楕円，放物線になるかを調べよ．

(2)　x 座標が $0\leqq x\leqq a^2$ の範囲内にある点 P の軌跡と直線 $x=a^2$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V とする．このとき，極限値

$$\lim_{a\to 0}\frac{V}{\pi a^6}$$

を求めよ．

♠ 文系学部

1　数列 $\{a_n\}$ は $a_1=1$，$(a_{n+1}-a_n)^2=a_{n+1}+a_n,\ a_{n+1}>a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている．

(1)　a_2 を求めよ．

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公差が 1 の等差数列であることを示せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

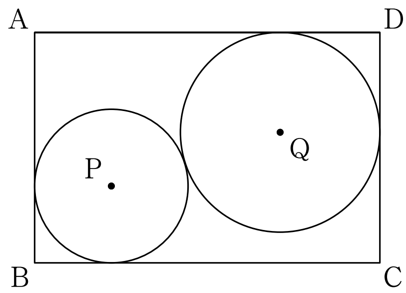
2　正の実数 x に対して，$a\leqq x<a+1$ を満たす整数 a を $[\,x\,]$ で表し，$f(x)=x-[\,x\,]$ と定める．次の問いに答えよ．必要ならば，$1.584<\log_2 3<1.585$ を用いてよい．

(1)　$\left[\,\dfrac{7}{3}\,\right]$，$\left[\,\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\,\right]$，$\left[\,\log_2\dfrac{5}{4}\,\right]$ を求めよ．

(2)　$f\left(\log_2\dfrac{5}{4}\right)<f\left(\dfrac{7}{3}\right)<f\left(\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\right)$ を示せ．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

3 $AB=2$, $BC=3$ の長方形 ABCD の内部に円 P と円 Q が含まれている．ただし，円 P は AB, BC の 2 辺と，円 Q は CD, DA の 2 辺とそれぞれ接している．また，円 P と円 Q は外接している．円 P の半径を p，円 Q の半径を q とする．



(1)　$k=p+q$ とおくとき，k の値を求めよ．

(2)　p のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　円 P の面積と円 Q の面積の和を S とするとき，S の最大値と最小値を求めよ．

4 3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3bx+1$ は $x=-1$ で極大値をとるとする．

(1)　$f(x)$ が $x=p$ で極小値をとるとき，b と p を a で表せ．

(2)　$f(x)$ の極大値と極小値の差が $\frac{1}{2}$ のとき，a の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　C いろいろな曲線

2 標準　B ベクトル（空間）

3 標準　III 定積分

4 やや難　III 積分法の応用・C いろいろな曲線

♣ 文系学部

1 標準　A 数列

2 標準　II 指数関数・対数関数

3 標準　I 2 次関数

4 標準　II 微分積分

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 理系学部

1 　$k=\dfrac{ab}{2}$，$(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\ \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$

2 (1) $\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(2) $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

3 (1) $K_1=1$，$K_2=e-2$，$K_3=-2e+6$

(2) $p=\dfrac{1}{30}$，$q=\dfrac{35e-96}{6}$，$a=\dfrac{5(96-35e)}{2}$

4 (1) $\begin{cases} a=1 \text{ のとき　放物線} \\ a>1 \text{ のとき　楕円} \\ a<1 \text{ のとき　双曲線} \end{cases}$

(2) 1

◇ 文系学部

1 (1) $a_2=3$

(2) 証明は省略

(3) $a_n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

2 (1) $\left[\ \dfrac{7}{3}\ \right]=2$，$\left[\ \log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\ \right]=2$，$\left[\ \log_2\dfrac{5}{4}\ \right]=0$

(2) 証明は省略

3 (1) $k=5-2\sqrt{3}$

(2) $4-2\sqrt{3}\leqq p\leqq 1$

(3) 最大値：$\pi(29-16\sqrt{3})$，　最小値：$\dfrac{\pi(37-20\sqrt{3})}{2}$

4 (1) $b=2a-1$，　$p=-2a+1$

(2) $a=\dfrac{1}{2}$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto