◀2008 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　2 次の正方行列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots$ を

$$A_0 = O,\ \ A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，O は 2 次の零行列，B と C は 2 次の正方行列とする．

(1)　$A_n(E - C)$ を B と C を用いて表せ．ここで E は 2 次の単位行列とする．

(2)　B と C を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，A_{3n} を求めよ．

2　点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle \mathrm{XOY} = 60^\circ$ とする．2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする．線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　線分 MN の長さを s と t を用いて表せ．

(2)　点 A, B と C, D が，$s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ．

3　N を 2 以上の自然数とする．

(1)　関数 $f(x) = (N - x)\log x$ を $1 \leqq x \leqq N$ の範囲で考える．このとき，曲線 $y = f(x)$ は上に凸であり，関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる．このことを示せ．

(2)　自然数の列 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N$ を

$$a_n = n^{N-n} \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots, N)$$

で定める．$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N$ のうちで最大の値を M とし，$M = a_n$ となる n の個数を k とする．このとき $k \leqq 2$ であることを示せ．

(3)　(2) で $k = 2$ となるのは，N が 2 のときだけであることを示せ．

4　t を負の実数とし，xy 平面上で曲線 $y = 2^{2x+2t}$ と曲線 $y = 2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする．

(1)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ．

(2)　t が負の実数の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ．

5　1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする．n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする．

(1)　$501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ．

(2)　$p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ．

(3)　$1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **2** と同じ．

2　実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x) = x^3 + 3ax^2 + 3ax + b$ を考える．$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

とする．α, β, γ の間に $\alpha + \gamma = 2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　b を a の式で表せ．

(2)　α, β, γ がすべて実数であるとする．このとき a のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　(1) で求めた a の式を $f(a)$ とする．a が (2) の範囲を動くとき，関数 $b = f(a)$ のグラフをかけ．

3　a を正の定数とし，

$$f(x) = \big||x - 3a| - a\big|, \quad g(x) = -x^2 + 6ax - 5a^2 + a$$

を考える．

(1)　方程式 $f(x) = a$ の解を求めよ．

(2)　$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　C 行列
- **2**　標準　II 図形と方程式・B ベクトル
- **3**　やや難　III 微分法の応用
- **4**　標準　III 積分法の応用
- **5**　やや難　A 確率

♣ 文系学部

- **1**　標準　II 図形と方程式・B ベクトル
- **2**　標準　II 複素数と方程式
- **3**　標準　II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $A_n(E-C)=B(E-C^n)$

(2) $A_{3n}=\dfrac{1-(-8)^n}{3}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

2 (1) $\mathrm{MN}=\dfrac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $V(t)=\dfrac{\pi}{4\log 2}(2^{8t}-2^{6t+1}+2^{4t})$

(2) $\dfrac{\pi}{64\log 2}\quad\left(t=-\dfrac{1}{2}\right)$

5 (1) 証明は省略．$\dfrac{1}{2^{501}}$

(2) $p(1002)-p(1001)=-\dfrac{1}{2^{1002}}$

(3) $p(n+1)-p(n)=-\dfrac{1}{2^{1002}}$

◇ 文系学部

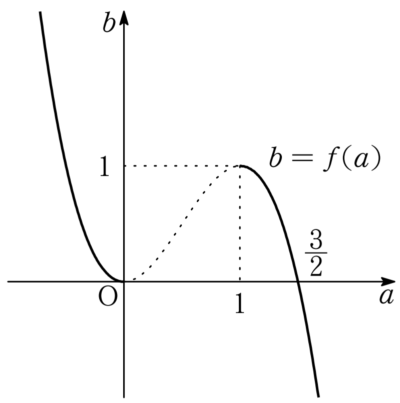
1 理系学部 **2** と同じ．

2 (1) $b=3a^2-2a^3$

(2) $a\leqq 0,\ 1\leqq a$

(3) $b=3a^2-2a^3\ (a\leqq 0,\ 1\leqq a)$

グラフは右図．



3 (1) $x=a,\ 3a,\ 5a$

(2) $S=\dfrac{32}{3}a^3+2a^2$