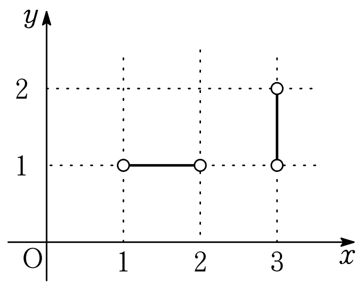
◀1998 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．また，2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という．次の問いに答えよ．



格子辺の例

(1)　点 P(630, 5400) を通る直線 $y = ax$ (a は定数) は $0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか．

(2)　n を 2 以上の整数とする．点 P(630, 5400) を通る曲線 $y = bx^n$ (b は n により定まる定数) は $0 \leqq x \leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか．

2　n を 1 以上の整数とする．n 次の整式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

とその導関数 $f'(x)$ の間に $nf(x) = (x+p)f'(x)$ という関係があるとする．ただし，p は定数である．このとき，$f(x) = a_0(x+p)^n$ であることを示せ．

3

(1)　a を 1 より大きい実数とする．0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\log 2 + \frac{x}{2}\log a \leqq \log(1 + a^x) \leqq \log 2 + \frac{x}{2}\log a + \frac{x^2}{8}(\log a)^2$$

ただし，対数は自然対数である．

(2)　$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $a_n = \left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ とおく．(1) の不等式を用いて極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

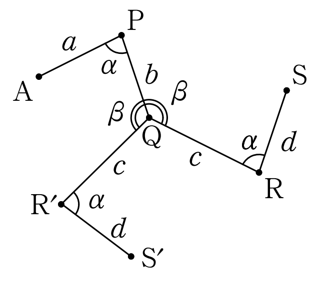
4　平面上において，7 点 A, P, Q, R, S, R′, S′ を右図のようにとる．ただし，

$\mathrm{AP} = a$,　$\mathrm{PQ} = b$,　$\mathrm{QR} = \mathrm{QR'} = c$,　$\mathrm{RS} = \mathrm{R'S'} = d$,

$\angle\mathrm{APQ} = \angle\mathrm{SRQ} = \angle\mathrm{S'R'Q} = \alpha$　$(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$

$\angle\mathrm{RQP} = \angle\mathrm{PQR'} = \beta$　$(0 \leqq \beta \leqq \pi)$

である．このとき $\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AS'}^2$ を $\sin\alpha, \sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ．



5　座標空間において，平面 $z = \sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0, 0, \sqrt{2})$ の円を C_1，平面 $z = -\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0, 0, -\sqrt{2})$ の円を C_2 とする．また，空間内の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対し，円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m，円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M とする．次の問いに答えよ．

(1)　$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ．

(2)　$|M - 2\sqrt{6}| \geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする．図形 H の体積を求めよ．

♠ 文系学部

1　平面上の 4 点 O, P, Q, R が条件 $\mathrm{OP} = 2$, $\mathrm{OQ} = 3$, $\angle\mathrm{POQ} = 60^\circ$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{0}$ を満たすとする．線分 OR の長さと $\cos\angle\mathrm{POR}$ の値を求めよ．

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

2　単位円周上の 3 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$, $\mathrm{R}(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$ を考える．θ が 0° から 360° まで動くとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$ がとる値の範囲を求めよ．

3　放物線 $y=x^2+1$ 上に点 P をとる．原点 O と P を結ぶ線分 OP を $t^2:(1-t^2)\ (0<t<1)$ に内分する点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 P が放物線上を動くとき点 Q が描く曲線 C の方程式を求めよ．

(2)　放物線 $y=x^2+1$ と曲線 C が囲む図形の面積 S を求めよ．

(3)　$0<t<1$ における S の最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　やや難　A 整数問題

2　標準　A 整式・III 微分法

3　標準　III 数列の極限

4　標準　B ベクトル（平面）

5　やや難　III 積分法の応用

♣ 文系学部

1　標準　B ベクトル（平面）

2　標準　II 三角関数

3　標準　II 図形と方程式・微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) 5850 (個)

(2) $\begin{cases} n=2 \text{ のとき} & 5970\,(\text{個}) \\ n=3 \text{ のとき} & 6018\,(\text{個}) \\ n \geqq 4 \text{ のとき} & 6028\,(\text{個}) \end{cases}$

2 証明は省略

3 (1) 証明は省略

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$

4 $\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AS}'^2 = 4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$

5 (1) $m = \sqrt{(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2}$, $M = \sqrt{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2}$

(2) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

◇ 文系学部

1 $\mathrm{OR} = \sqrt{19}$

$\cos\angle\mathrm{POR} = -\dfrac{7\sqrt{19}}{38}$

2 $0 \leqq \mathrm{PQ}^2 + \mathrm{QR}^2 \leqq \dfrac{25}{4}$

3 (1) 放物線 ： $y = \dfrac{1}{t^2}x^2 + t^2$

(2) $S = -\dfrac{4}{3}t^3 + \dfrac{4}{3}t$

(3) $\dfrac{8\sqrt{3}}{27}$ $\left(t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人 ： makoto