◀2010 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　男性 $\mathrm{M}_1, \cdots, \mathrm{M}_4$ の 4 人と女性 $\mathrm{F}_1, \cdots, \mathrm{F}_4$ の 4 人が，横一列に並んだ座席 $\mathrm{S}_1, \cdots, \mathrm{S}_8$ に座る場合を考える．

(1)　同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか．

(2)　(1) の座り方の中で，M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか．

(3)　(1) の座り方の中で，M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか．

2　次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 3,\quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1)　すべての自然数 n に対して

$$X\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_{n+2} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{pmatrix}$$

が成り立つように，行列 X を定めよ．

(2)　自然数 n に対して $a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2$ の値を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

3　原点を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C_2 とする．C_1 上に点 $\mathrm{P}_1(\cos\theta, \sin\theta)$ があり，また，C_2 上に点 $\mathrm{P}_2\left(\dfrac{1}{2}\cos 3\theta, \dfrac{1}{2}\sin 3\theta\right)$ がある．ただし，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるとする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点を Q とし，点 Q の原点からの距離を $r(\theta)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 Q の x 座標の取りうる範囲を求めよ．

(2)　点 Q が y 軸上にあるときの θ の値を α とする．このとき，α および定積分

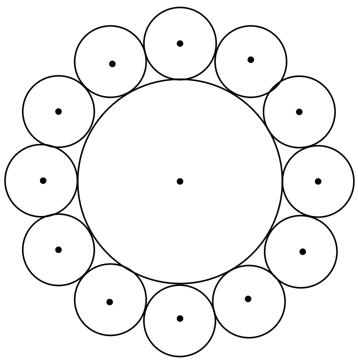
$$\int_0^{\alpha} \{r(\theta)\}^2\, d\theta$$

を求めよ．

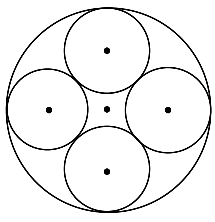
4　平面上に半径 1 の円 C がある．この円に外接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 1）のように配置し，その一つの円の半径を R_n とする．また，円 C に内接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 2）のように配置し，その一つの円の半径を r_n とする．ただし，$n \geqq 3$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　R_6, r_6 を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を用いてよい．



例 1 : $n = 12$ の場合



例 2 : $n = 4$ の場合

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ.

2　自然数 m, n に対して，自然数 $m \diamond n$ を次のように定める.

$\diamond$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	4	6	8	10	12	$\cdots$
2	9	13	17	21	25	$\cdots$
3	16	22	28	34	40	$\cdots$
4	25	33	41	49	57	$\cdots$
5	36	46	56	66	76	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m \diamond n$

例えば，$1 \diamond 1 = 4$，$1 \diamond 2 = 6$，$2 \diamond 1 = 9$，$4 \diamond 2 = 33$，$5 \diamond 3 = 56$，$1 \diamond 6 = 14$，$6 \diamond 1 = 49$ である.

(1)　数列 $8 \diamond 1, 8 \diamond 2, 8 \diamond 3,$ …… の初項 $8 \diamond 1$ から第 25 項 $8 \diamond 25$ までの和を求めよ.

(2)　$m \diamond n = 474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ.

3　a, b を実数とし，$a \neq 0$ とする．x についての 3 次方程式

$$ax^3 + (a+1)x^2 + (b+1)x + b = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える.

(1)　$a = b = 1$ のとき，① の実数解を求めよ.

(2)　① がちょうど 2 つの相異なる実数解を持つ条件を a, b を用いて表せ.

4　a を正の実数とする．放物線 $P : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を ℓ_1 とし，点 A を通り ℓ_1 と直交する直線を ℓ_2 とする．また，ℓ_2 と放物線 P との交点のうち A ではない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする．さらに，点 B を通り ℓ_1 に平行な直線を ℓ_3 とし，ℓ_3 と放物線 P との交点のうち B ではない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする.

(1)　$b + c = 2a$ であることを示せ.

(2)　放物線 P と ℓ_3 で囲まれた部分の面積を S とする．S を a を用いて表し，S が最小になるときの S と a の値を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 |基本| A 場合の数

2 |標準| B 数列・C 行列

3 |標準| III 積分法の応用

4 |標準| III 極限

♣ 文系学部

1 |基本| A 場合の数

2 |標準| I 整数問題・B 数列

3 |標準| II 高次方程式

4 |標準| II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 （1） 1152 通り

（2） 144 通り

（3） 648 通り

2 （1） $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

（2） $a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2 = 5 \cdot (-1)^n$ ． 証明は省略

3 （1） $-\dfrac{\sqrt{3}}{36} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$

（2） $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$， $\displaystyle\int_0^{\alpha} \{r(\theta)\}^2\,d\theta = \frac{1}{16}\left(\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}\right)$

4 （1） $R_6 = 1$， $r_6 = \dfrac{1}{3}$

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n) = 2\pi^2$

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ．

2 （1） 6825

（2） $(m, n) = (1, 236)$， $(11, 16)$

3 （1） $x = -1$

（2） $a + b = 1$ または $ab = \dfrac{1}{4}$ ． ただし，$(a, b) \fallingdotseq (0, 1)$， $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

4 （1） 証明は省略

（2） $S = \dfrac{1}{6}\left(4a + \dfrac{1}{a}\right)^3$

最小値：$\dfrac{32}{3}$ $\left(a = \dfrac{1}{2}\right)$