◀2005 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　a を正の実数とする．$x \geqq 0$ のとき，$y = \dfrac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　実数 $x,\, y,\, z$ について $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つか答えよ．これを用いて，命題「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」が真となる最小の正の実数 a を求めよ．

2　$a,\, b$ を正の実数とし，2 つの数列 $\{a_n\},\, \{b_n\}$ を

$$a_1 = a,\quad b_1 = b,\quad a_{n+1} = \frac{2a_nb_n + {a_n}^2}{{a_n}^2 + 5a_nb_n},\quad b_{n+1} = \frac{3a_nb_n}{{a_n}^2 + 5a_nb_n}\quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1)　$c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n,\quad \lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

3　O を原点とする座標平面において，点 A の座標を $(2,\, 0)$ とする．線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする．T が円周上を動くとき，P が描く曲線の長さを求めよ．

4　O を原点とする複素数平面上で，複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする．z の偏角を θ と表す．$w = z^2 + \dfrac{1}{z}$ とおき，w を表す点を Y とする．次の問いに答えよ．ただし，θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする．

(1)　$w = 0$ となる θ をすべて求めよ．

(2)　$w \fallingdotseq 0$ のとき，w の偏角 β を θ で表せ．ただし，β は $-\pi$ 以上 π 未満とする．

(3)　三角形 OXY の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ．

♠ 文系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある．その中から 3 冊取り出すとき，英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が，$\dfrac{7}{40}$ となる．このとき，日本語の本は何冊あるか答えよ．

(2)　各組が 12 枚ずつからなる赤，青，黄色の 3 組のカードがあり，各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている．それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき，数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ．

2　θ を $0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする．2 つの数列 $\{x_n\},\, \{y_n\}$ を

$$x_1 = \cos\theta,\quad y_1 = \sin\theta,\quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}},\quad y_{n+1} = \frac{y_n}{2x_{n+1}}\quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1)　$x_2,\, y_2$ を計算せよ．さらに，一般項 $x_n,\, y_n$ を求めよ．

(2)　$n \geqq 7$ ならば，$(x_n + y_ni)^{4n} = i$ とはならないことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする．

(3)　θ が $90^\circ < \theta < 180^\circ$ の範囲にあるとき，$(x_n + y_ni)^{4n} = i$ となる n と θ を求めよ．

3 関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 a, b の値を求めよ．

4 2 つの単位ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．次の問いに答えよ．

(1) 2 次関数 $f(x)=\left|x\vec{a}+\vec{b}\right|^2$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ．

(2) θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき，放物線 $y=f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ．

(3) (2) で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 |標準| A 分数式・不等式の証明

2 |標準| III 数列の極限

3 |標準| III 積分法の応用

4 |やや難| B 複素数と複素数平面

♣ 文系学部

1 |標準| I 確率

2 |やや難| B 複素数と複素数平面

3 |基本| II 微分積分

4 |標準| B ベクトル

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\begin{cases} a > 1 \text{ のとき} & y < -a,\ -\dfrac{1}{a} \leqq y \\ a = 1 \text{ のとき} & y = -1 \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & y \leqq -\dfrac{1}{a},\ -a < y \end{cases}$

(2) 証明は省略．等号成立は，$x = y = z$ のとき．$a = 3$

2 (1) $c_n = 1 + \left(\dfrac{a}{b} - 1\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$

3 8

4 (1) $\theta = -\pi,\ -\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}$

(2) $\beta = \dfrac{\theta}{2} - \pi,\ \dfrac{\theta}{2} + \pi$

(3) 4 個

◇ 文系学部

1 (1) 7 冊

(2) 88 通り

2 (1) $x_2 = \cos\dfrac{\theta}{2},\ y_2 = \sin\dfrac{\theta}{2}$

$x_n = \cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}},\ y_n = \sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$

(2) 証明は省略

(3) $(n, \theta) = (1, 112.5^\circ),\ (2, 112.5^\circ),\ (3, 150^\circ),\ (6, 120^\circ)$

3 $(a, b) = (3, 5),\ (-3, 1)$

4 (1) $\begin{cases} 0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ \text{ のとき} & \text{最小値 } 1 \\ 90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ \text{ のとき} & \text{最小値 } \sin^2\theta \end{cases}$

(2) 放物線：$y = 1 - x^2\ (-1 \leqq x \leqq 1)$

(3) $\dfrac{4}{3}$