◀2003 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ は，$x = 1,\ -1,\ -2$ で，整数値 $f(1) = r,\ f(-1) = s,\ f(-2) = t$ をとるとする．

(1)　a, b, c を $r,\ s,\ t$ の式で表せ．

(2)　すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になることを示せ．

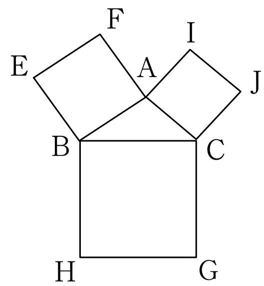
2　xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点 $(1, 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する．B は点 $(-1, 0)$ を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る．ただし n は 2 以上の整数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　A が C を一周する間に A と B は何回出会うか．

(2)　A と B が点 $(0, 1)$ で出会うのは n がどのような条件をみたすときか．

(3)　$n = 7$ とする．A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点 $(-2, 0)$ を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ．

3　複素数平面上において，右の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形 ABEF, BCGH, CAIJ を作る．



(1)　点 A, B, C がそれぞれ複素数 α, β, γ で表されているとき，点 F, H, J を α, β, γ の式で表せ．

(2)　三つの正方形 ABEF, BCGH, CAIJ の中心をそれぞれ P, Q, R とする．このとき線分 AQ と線分 PR は長さが等しく，$\mathrm{AQ} \perp \mathrm{PR}$ であることを証明せよ．

4　$1 < a < b$ とする．原点 O と点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線，原点 O と点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を通る直線，および曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ で囲まれた部分を R とする．R の面積を E, R を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．

(1)　E を a と b の式で表せ．

(2)　$c > 1$ とし，曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ から直線 $y = -x$ に下ろした垂線を PQ とする．線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2 = s^2 + 2$ となることを示せ．

(3)　V を a と b の式で表せ．

(4)　$b = a + 1$ のとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty} E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} V$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　r, s, t は 0 でない定数とする．数列 $\{a_n\}$ は条件

$$ra_{n+1} + sa_n + t = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとし，$b_n = a_{n+1} - a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．

(1)　数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ．

(2)　$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_2 < a_3,\ a_4 = 13 + 3\sqrt{3}$ であるとき，一般項 a_n を求めよ．

(3)　(2) の条件の下で $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$ を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　複素数平面上の点 z_n ($n=1, 2, 3, \cdots$) を以下のように定める．$z_1=1$ とする．次にさいころを振り，出た目が

　(a)　1 または 2 のとき，$z_{n+1}=z_n+(1+i)$

　(b)　3 以上のとき，$z_{n+1}=z_n(1+i)$

とし，この操作を $n=1, 2, 3, \cdots$ の順にくり返す．初めて $|z_n| \geqq 3$ となるような番号 n を N とする．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　N のとりうる値を求めよ．

(2)　N の期待値を求めよ．

4　曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする．A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする．B を通り，B における C の接線と直交する直線 m とする．

(1)　l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ．

(2)　l と m が直交するように点 A, B が動くとき，交点 P がえがく曲線の方程式を求めよ．

(3)　(2) で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　A　整数問題
- **2**　標準　II　三角関数
- **3**　標準　B　複素数と複素数平面
- **4**　標準　III　積分法とその応用

♣ 文系学部

- **1**　標準　A　数列
- **2**　標準　II　三角関数
- **3**　標準　B　複素数と複素数平面
- **4**　標準　II　微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $a=\dfrac{r+3s-t}{6}$, $b=\dfrac{r+s}{2}$, $c=\dfrac{2r-6s+t}{6}$

(2) 証明は省略

2 (1) $(n+1)$ 回出会う

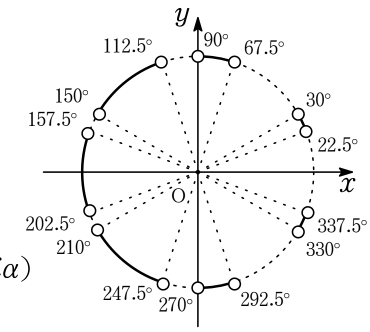
(2) n を 4 で割って 1 余るような 2 以上の整数のとき

(3) $22.5^\circ<\theta<30^\circ$, $67.5^\circ<\theta<90^\circ$

$112.5^\circ<\theta<150^\circ$, $157.5^\circ<\theta<202.5^\circ$

$210^\circ<\theta<247.5^\circ$, $270^\circ<\theta<292.5^\circ$

$330^\circ<\theta<337.5^\circ$ 右図実線部分.



3 (1) $\mathrm{F}((1+i)\alpha-i\beta)$, $\mathrm{H}((1+i)\beta-i\gamma)$, $\mathrm{J}((1+i)\gamma-i\alpha)$

(2) 証明は省略

4 (1) $E=\log\dfrac{b}{a}$

(2) 証明は省略

(3) $V=\dfrac{2\sqrt{2}\pi(b-a)(ab-1)}{3ab}$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}E=0$, $\displaystyle\lim_{a\to\infty}V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $a_n=\dfrac{(\sqrt{3})^{n+1}-4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

(3) $S_n=\dfrac{2n}{n+2}$

2 理系学部 **2** と同じ

3 (1) $N=3,\ 4,\ 5$

(2) $\dfrac{107}{27}$

4 (1) $\mathrm{P}\left(-2ab(a+b),\ a^2+ab+b^2+\dfrac{1}{2}\right)$

(2) $y=4x^2+\dfrac{3}{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$