◀2000 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　x を 1 でない正の実数とし

$$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2$$

とおく．

(1)　方程式 $f(x)=2$ の解を求めよ．

(2)　不等式 $f(x)\geqq 2$ をみたす x の値の範囲を求めよ．

2　整数 $x,\ y$ が方程式

$$x^2-3y^2=1 \qquad \cdots\cdots①$$

をみたすとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を ① の整数解と呼ぶ．行列 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2)　$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が ① の整数解のとき，$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ も ① の整数解であることを示せ．

(3)　$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は $a>0,\ b\geqq 0$ なる ① の整数解とし，$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする．このとき $c>0,\ d<b$ となることを示せ．また，$d<0$ ならば $b=0$ であることを示せ．

(4)　$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が $a>0,\ b>0$ なる ① の整数解のとき，ある自然数 n に対して $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

3　関数 $f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ について答えよ．

(1)　$t=\cos x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ．

(2)　$f(x)=0$ をみたす x の値を求めよ．

(3)　(2) で求めた x に対して，$f'(x)$ の値を求めよ．

(4)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$ の値を求めよ．

4　原点を O とする複素数平面上で，0 でない複素数 $z,\ w$ の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z),\ \mathrm{Q}(w)$ とする．z に対して w を，O を始点とする半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に $\mathrm{Q}(w)$ があり，$|w|=\dfrac{2}{|z|}$ をみたすように取る．

(1)　$w=\dfrac{2}{\bar{z}}$ を示せ．

(2)　$\pm 2,\ \pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $\mathrm{P}(z)$ が動く．このとき，$\mathrm{Q}(w)=\mathrm{P}(z)$ となる z を求めよ．

(3)　$\mathrm{P}(z)$ が (2) の正方形の周上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形を求めて図示せよ．

♠ 文系学部

1　数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=6$ で漸化式

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 4 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたす．また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の第 $n+1$ 項 b_{n+1} から第 $2n$ 項 b_{2n} までの和を求めよ．

2　三角錐 ABCD において，AB = AC = AD = 3, BC = CD = DB = 2 とする．また，辺 BC を 1：3 に内分する点を E とする．このとき，三角形 ADE に対して答えよ．

(1)　辺 DE, AE の長さを求めよ．

(2)　三角形 ADE の面積を求めよ．

3　次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1)　自然数 n に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2)　$z = \cos\dfrac{45^\circ}{2} + i\sin\dfrac{45^\circ}{2}$ とするとき，z^8 の値を求めよ．また，$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$ の実部を求めよ．

4　xy 平面上の曲線 $C : y = |2x - 1| - x^2 + 2x + 1$ について答えよ．

(1)　曲線 C の概形を描け．

(2)　直線 $l : y = ax + b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの a, b の値を求めよ．

(3)　(2) の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　基本　II 指数関数・対数関数

2　やや難　A 整数問題・C 行列

3　標準　III 積分法

4　標準　B 複素数と複素数平面

♣ 文系学部

1　標準　A 数列

2　基本　I 三角比（空間）

3　標準　B 複素数と複素数平面

4　標準　II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $x=\dfrac{1}{2},\ 2,\ 8$

(2) $0<x \leqq \dfrac{1}{2},\ 1<x \leqq 2,\ 8 \leqq x$

2 (1) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

3 (1) $f(x)=4t^3+2t^2-2t-1\ (-1 \leqq t \leqq 1)$

(2) $x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi$

(3) $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-2-2\sqrt{2},\ f'\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ f'\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=2-2\sqrt{2}$

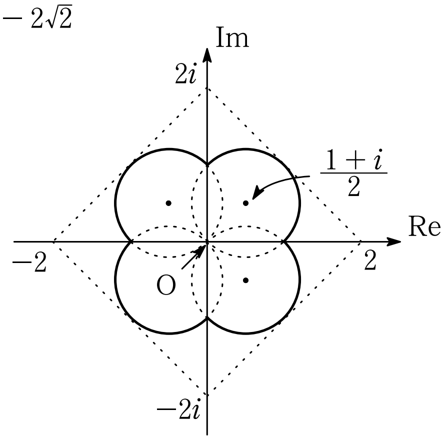
(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx=\dfrac{16\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{6}$

4 (1) 証明は省略

(2) $z=1 \pm i,\ -1 \pm i$

(3) $\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ （$x \geqq 0,\ y \geqq 0$）

（他の象限については，対称性から同様に求められる.）



◇ 文系学部

1 (1) $a_n=n^2+3n+2$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）

(2) $b_n=\dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}$

2 (1) $\mathrm{DE}=\dfrac{\sqrt{13}}{2},\ \mathrm{AE}=\dfrac{\sqrt{33}}{2}$

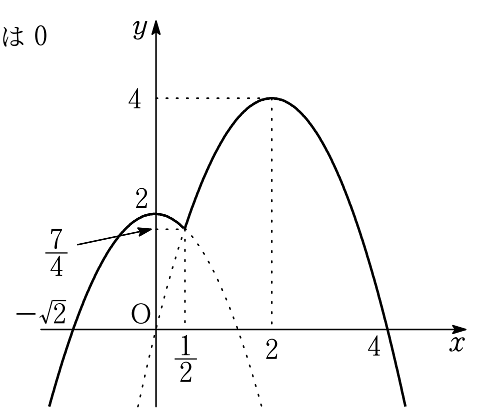
(2) $\dfrac{\sqrt{101}}{4}$

3 (1) 証明は省略

(2) $z^8=-1,\ z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7$ の実部は 0

4 (1)
$$y=\begin{cases} -x^2+2 & \left(x \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ -x^2+4x & \left(\dfrac{1}{2}<x\right) \end{cases}$$

グラフは右図の太実線.



(2) $a=1,\ b=\dfrac{9}{4}$

(3) $S=\dfrac{2}{3}$