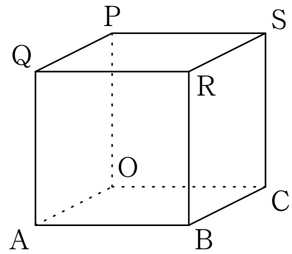
◀1999 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　辺の長さが 4 の立方体 OABC − PQRS がある．辺 AB の中点を D，辺 BC の中点を E，辺 CS の中点を F，辺 PS の中点を G，辺 PQ の中点を H とする．このとき，次の問いに答えよ．



(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}, \vec{f}, \vec{g}$ で表せ．ただし，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする．

(2)　5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ．

(3)　五角形 DEFGH の面積を求めよ．

(4)　辺 BR を 3 : 1 の比に内分する点を K とする．点 K を頂点とし，五角形 DEFGH を底面とする五角錐（すい）の体積を求めよ．

2　n, k を自然数とする．等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n + k - 1 \cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ の組の個数を $a(n, k)$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，例えば $(x_1, x_2) = (1, 2)$ と $(x_1, x_2) = (2, 1)$ とは別の組と考える．

(1)　式 ① における x_k の取りうる値の範囲を求めよ．

(2)　関係式 $a(n, k+1) = \sum_{j=1}^{n} a(j, k)$ が成り立つことを示せ．

(3)　$a(n, 1), a(n, 2), a(n, 3), a(n, 4)$ を求め，$a(n, k)$ を推定せよ．

(4)　(3) において，$a(1, k), a(2, k), \cdots, a(n, k)$ の推定が正しいとしたとき，$a(n, k+1)$ の推定が正しいことを証明せよ．

3　a, b を正の数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ae^{x} + be^{-x}$$

とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(2)　関数 $y = f(x)$ のグラフが，y 軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ．

(3)　x についての方程式 $f(x) = 1$ の解のうち，$x \geqq 0$ を満たすものがただ 1 つであるような a, b の範囲を ab 平面に図示せよ．

4　a, b を実数とする．2 つの関数

$$f(x) = \log(x^2 + 1), \quad g(x) = ax^2 + b$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ．

(2)　曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

(3)　(2) の条件において，$a = \dfrac{1}{4}$, $b \fallingdotseq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

♠ 文系学部

1 $0° < \theta < 90°$ とする．x についての 2 次方程式

$$(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0$$

について，次の問いに答えよ．

(1) この方程式が，ただ 1 つの解をもつような θ の値と，そのときの解を求めよ．

(2) この方程式が，-1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ．

2 2 つの複素数 α, β が，条件 $\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$, $|\alpha+\beta|=3$ を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ を求めよ．ただし，$0° \leqq \theta < 360°$ とする．

(2) α の絶対値を求めよ．

(3) 複素数平面上で，α, β, $\alpha+\beta$, $-i\alpha$, $i\beta$ の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ．

3 理系学部 **1** と同じ．

4 円 $x^2+(y-1)^2=3$ 上の点 P から放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし，その 2 つの接点を Q, R とする．このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と，そのときの面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　B　ベクトル（空間）

2 標準　A　数列

3 標準　III　微分法の応用

4 標準　III　微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

1 標準　I　2 次関数・三角比

2 標準　B　複素数と複素数平面

3 標準　B　ベクトル（空間）

4 標準　II　微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{1}{2}(\vec{d} + 2\vec{f} - \vec{g})$

(2) 証明は省略

(3) $10\sqrt{3}$

(4) $\dfrac{50}{3}$

2 (1)
$$\begin{cases} k = 1 \text{ のとき} \quad x_k = k \\ k \geqq 2 \text{ のとき} \quad 1 \leqq x_k \leqq n \quad (x_k \text{ は自然数}) \end{cases}$$

(2) 証明は省略

(3) $a(n,\,1) = 1,\ a(n,\,2) = n,\ a(n,\,3) = \dfrac{n(n+1)}{2},\ a(n,\,4) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

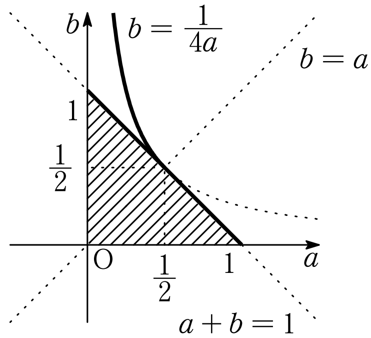
$a(n,\,k) = \dfrac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!}$

(4) 証明は省略

3 (1) $2\sqrt{ab}$

(2) 証明は省略

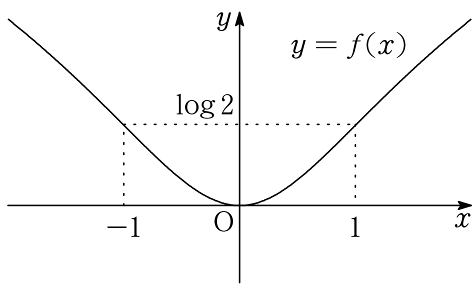
(3)
$$\begin{cases} a + b < 1 \\ b \geqq a \text{ かつ } b = \dfrac{1}{4a} \\ b < a \text{ かつ } a + b = 1 \end{cases}$$



右図の斜線部分と太実線部分で，境界は線分 $a + b = 1 \left(\dfrac{1}{2} \leqq a < 1\right)$ のみ含む.

4 (1) 極小値 0 ($x = 0$)，変曲点 $(-1,\,\log 2),\,(1,\,\log 2)$

グラフは，右図.



(2) $b = 0$ または $b = a - \log a - 1\ (0 < a < 1)$

(3) $3\sqrt{3} - \dfrac{4}{3}\pi$

◇ 文系学部

1 (1) $x = -2 - \sqrt{3}\quad (\theta = 30^\circ)$

(2) $45^\circ \leqq \theta < 90^\circ$

2 (1) $\theta = 120^\circ,\ 240^\circ$

(2) $|\alpha| = 3$

(3)
$$\begin{cases} \theta = 120^\circ \text{ のとき} \quad \text{面積は } \dfrac{36 + 27\sqrt{3}}{4} \\ \theta = 240^\circ \text{ のとき} \quad \text{面積は } \dfrac{36 - 9\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

3 理系学部 **1** と同じ

4 $\dfrac{16}{3}$,　$\mathrm{P}(\pm\sqrt{2},\,0)$