◀1995 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$\vec{0}$ でない 3 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は条件 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ をみたしている．

(1)　$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$ のとき，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角の大きさを求めよ．

(2)　$\vec{a_1}=\vec{b}-\vec{c}, \vec{b_1}=\vec{c}-\vec{a}, \vec{c_1}=\vec{a}-\vec{b}, T=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2, T_1=\left|\vec{a_1}\right|^2+\left|\vec{b_1}\right|^2+\left|\vec{c_1}\right|^2$ とおく．このとき T_1 を T で表せ．

(3)　$\vec{a}\perp\vec{b}, \vec{b_1}\perp\vec{c_1}$ のとき，比 $\left|\vec{a}\right|:\left|\vec{b}\right|:\left|\vec{c}\right|$ を求めよ．

2　k を実数とするとき，x についての方程式 $\log_2\left|3x^3-18x+4\sqrt{2}\right|=k$ の異なる実数解の個数を調べよ．

3　実数 a, b に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=a\cos x+b\cos 2x$ と定義する．

(1)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos x\cos 2x\,dx$ の値を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx=\pi$ となるとき，a, b のみたす式を求めよ．

(3)　a, b が (2) の条件をみたすとき，積 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

4　0 から 6 までの整数のうちから，a, b, c を重複なく選び，直線 $ax+by=c$ を作る．ただし，直線の方程式の両辺を定数倍して一致するものは同一の直線を表すものとする．

(1)　原点を通る直線の本数を求めよ．

(2)　作られる直線の総数を求めよ．

(3)　a, b, c を無作為に選ぶとき，直線 $ax+by=c$ が，3 点 O$(0, 0)$, A$(1, 0)$, B$(0, 1)$ を頂点とする三角形と共有点を持たない確率を求めよ．

♠ 文系学部

1　xyz 空間において，2 つの平面 $\alpha: x-y+2z=1$, $\beta: 2x+y+z=-1$ および球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ を考える．

(1)　α と β のなす角の大きさを求めよ．

(2)　α と β の交線の方程式を求めよ．

(3)　α と S とが交わってできる円の半径と中心の座標を求めよ．

2　実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は $A^2=-E$ をみたしている．ただし，E は単位行列である．

(1)　次の等式 $a+d=0, ad-bc=1$ および不等式 $bc\leqq -1$ を示せ．

(2)　このような行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のうちで，$a^2+b^2+c^2+d^2$ を最小にする行列を求めよ．

3　xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円周上に 2 点

$$\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta),\quad \mathrm{Q}(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

がある．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする．P から x 軸におろした垂線の足を M とする．中心 M，半径 MP の円と x 軸の交点のうち，O に近い方を R とする．

(1)　$t=\cos\theta-\sin\theta$ とするとき，t の値の範囲を求めよ．

(2)　三角形 OQR の面積 S を t を用いて表せ．

(3)　面積 S の最大値を求めよ．

4　n を 2 以上の整数とする．xy 平面上に曲線 $C:y=x^n+1$ および点 A(1, 1) がある．A から C に異なる 2 本の接線を引き，その接点をそれぞれ P, Q とする．ただし，P の x 座標は Q の x 座標より小さいものとする．

(1)　P, Q の座標を求めよ．

(2)　線分 AP, AQ および曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 代幾 ベクトル
- **2** 標準 基解 指数関数・対数関数・微分積分
- **3** 標準 微積 積分法
- **4** 標準 確統 場合の数・確率

♣ 文系学部

- **1** 基本 代幾 平面・球面の方程式
- **2** 標準 代幾 行列
- **3** 基本 基解 三角関数・微分積分
- **4** 標準 基解 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\theta = 120^\circ$

(2) $T_1 = 3T$

(3) $\left|\vec{a}\right| : \left|\vec{b}\right| : \left|\vec{c}\right| = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

2

$$\begin{cases} k<\dfrac{7}{2} \text{ のとき} & 6 \text{ 個} \\ k=\dfrac{7}{2} \text{ のとき} & 5 \text{ 個} \\ \dfrac{7}{2}<k<\dfrac{9}{2} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \\ k=\dfrac{9}{2} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ k>\dfrac{9}{2} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

3 (1) 0

(2) $a^2 + b^2 = 1$

(3) $-\dfrac{3}{4} \leqq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq \dfrac{1}{4}$

4 (1) 22（本）

(2) 180（本）

(3) $\dfrac{1}{3}$

◇ 文系学部

1 (1) $\theta = 60^\circ$

(2) $x = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$

(3) 中心 $\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$，半径 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

2 (1) 証明は省略

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 (1) $0<t<1$

(2) $S = \dfrac{1}{2}t(1-t^2)$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

4 (1) $\mathrm{P}(0, 1)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{n}{n-1}, \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n + 1\right)$

(2) $\dfrac{1}{2(n+1)}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n$