◀2015 年　名古屋工業大学（前期）▶

1

（1）　$x \geqq 1$ のとき，不等式 $2\sqrt{x} > 1 + \log x$ が成り立つことを証明せよ．

（2）　関数 $y = x\log x\ (x > 0)$ のグラフを曲線 C とする．定数 a に対し，曲線 C の接線で点 $(a,\ 0)$ を通るものは何本あるか．

（3）　(2) で定められた曲線 C とその傾き 2 の接線および直線 $x = e^{-2}$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

2　2 つの関数

$$f(x) = \frac{2}{2x+3},\quad g(x) = \frac{2x+1}{-x+2}$$

がある．

（1）　関数 $g(x)$ の逆関数 $g^{-1}(x)$ を求めよ．

（2）　合成関数 $g^{-1}(f(g(x)))$ を求めよ．

（3）　実数 c が無理数であるとき，$f(c)$ は無理数であることを証明せよ．

（4）　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = g\left(\sqrt{2}\right),\quad a_{n+1} = f\left(a_n\right)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

（5）　(4) で定められた数列 $\{a_n\}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

3

（1）　次の 5 つの定積分を求めよ．((2) (iv) で用いる．)

$$I_1 = \int_0^{\pi} x\sin x\,dx,\quad I_2 = \int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx,\quad I_3 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} x\cos x\sin x\,dx,\quad I_5 = \int_0^{\pi} \sin^2 x\cos x\,dx$$

（2）　関数 $y = \sin x$ のグラフを曲線 C とする．C 上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ における接線を ℓ_1，点 $\mathrm{A}(\pi,\ 0)$ における接線を ℓ_2 とする．

ℓ_1 と ℓ_2 の交点を B, C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ から ℓ_1 に下ろした垂線を PQ とする．ただし，$t = 0$ のときは Q = P とする．OQ $= s$ とおく．

(i)　$\angle$OBA の大きさを求めよ．

(ii)　s を t を用いて表せ．

(iii)　線分 PQ の長さを t を用いて表せ．

(iv)　曲線 C と 2 直線 $\ell_1,\ \ell_2$ で囲まれた部分を，直線 ℓ_1 の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

4　四面体 ABCD は

(ア)　$\mathrm{BA} = \sqrt{66}$，$\mathrm{BC} = 7$，$\mathrm{BD} = \sqrt{65}$

(イ)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 28$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = 35$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}} = 40$

を満たす．頂点 A から平面 BCD に下ろした垂線を AH とする．

（1）　辺 AC の長さを求めよ．

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{BD}}$ を用いて表せ．

（3）　線分 CH の長さを求めよ．

（4）　面 ABC を直線 AH の周りに 1 回転させるとき，面 ABC が通過する部分の体積 V を求めよ．

出題範囲と難易度

1 標準　III 微分法の応用

2 標準　III 関数・数列の極限

3 標準　III 積分法の応用

4 標準　B ベクトル（空間）

略解

1 (1) 証明は省略

(2) $\begin{cases} a > 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \\ a < 0,\ a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ 0 \leqq a < 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 本} \end{cases}$

(3) $\dfrac{1}{4e^4}(e^6 - 4e^3 + 9)$

2 (1) $g^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

(2) $g^{-1}(f(g(x))) = -\dfrac{1}{4}x$

(3) 証明は省略

(4) $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 1}{-\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} + 2}$

(5) $\dfrac{1}{2}$

3 (1) $I_1 = \pi,\ I_2 = -2\pi,\ I_3 = \dfrac{\pi}{2},\ I_4 = -\dfrac{\pi}{4},\ I_5 = 0$

(2) (i) $\angle \mathrm{OBA} = \dfrac{\pi}{2}$

(ii) $s = \dfrac{t + \sin t}{\sqrt{2}}$

(iii) $\mathrm{PQ} = \dfrac{t - \sin t}{\sqrt{2}}$

(iv) $V = \dfrac{\pi^2}{6\sqrt{2}}(\pi^2 - 9)$

4 (1) $\mathrm{AC} = \sqrt{59}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \dfrac{3}{14}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$

(3) $\mathrm{CH} = \sqrt{19}$

(4) $V = \dfrac{32\sqrt{10}}{3}\pi$