

## ◀2014年 名古屋工業大学(前期)▶

**1** 以下の問いに答えよ.

(1)  $r \neq 1$  のとき  $S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + \dots + nr^n$  を求めよ.

(2)  $x > 0$  に対して,

$$f_n(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + 3e^{-3x} + \dots + ne^{-nx}$$

とおく. 極限  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  を求めよ. ただし,  $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$  であることを用いてもよい.

(3) (2) で得られた関数  $f(x)$  について, 不定積分  $\int f(x) dx$  を求めよ.

(4) (2) で得られた関数  $f(x)$  について, 定積分  $\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x) dx$  を求めよ.

**2** 放物線  $y = x^2$  上の動点  $P(p, p^2), Q(q, q^2)$  が次の条件をみたしている.

$$0 < p < q, \quad \angle POQ = \frac{\pi}{4}$$

ただし  $O$  は原点である. 点  $P$  と点  $Q$  における接線の交点を  $R$  とする.

(1)  $p$  のとり得る値の範囲を求めよ.

(2)  $q$  を  $p$  の式で表せ.

(3) 点  $R$  の  $x$  座標,  $y$  座標それぞれのとり得る値の範囲を求めよ.

(4) 点  $R$  が描く曲線の方程式を求めよ.

(5) 点  $R$  が描く曲線の漸近線を求めよ.

**3** 実数  $a, b, c, d$  について  $(a-d)^2 + 4bc = 0$  が成立している. このとき行列

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = A - \frac{a+d}{2}E$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし,  $A \neq \frac{a+d}{2}E$  とする.

(1) 行列  $B^2$  を求めよ.

(2) 自然数  $n$  に対して

$$A^n = pA + qE$$

となる実数  $p, q$  を  $n$  と  $a, b, c, d$  で表せ.

(3) 行列  $A$  が次をみたすとき,  $A$  を求めよ.

$$A^5 = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$$

**4** 座標空間に立方体  $K$  があり, 原点  $O$  と 3 点  $A(a, b, 0), B(r, s, t), C(3, 0, 0)$  が次の条件をみたしている.

(i)  $OA, AB, BC$  は立方体  $K$  の辺である.

(ii)  $OC$  は立方体  $K$  の辺ではない.

(iii)  $b > 0, t > 0$

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 立方体  $K$  の一辺の長さ  $l$  を求めよ .
- (2) 点  $A$  の座標を求めよ .
- (3) 点  $B$  の座標を求めよ .
- (4) 辺  $AB$  上の点  $P$  から  $x$  軸に下ろした垂線の足を  $H(x, 0, 0)$  とする .  $PH$  の長さを  $x$  を用いて表せ .
- (5) 立方体  $K$  を  $x$  軸を回転軸として 1 回転させて得られる回転体の体積  $V$  を求めよ .

**出題範囲と難易度**

- 1** 標準  III 積分法
- 2** 標準  C いろいろな曲線
- 3** 標準  C 行列
- 4** 難  III 積分法の応用

**略解**

- 1** (1)  $S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{(1-r)^2}$   
(2)  $f(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$   
(3)  $\int f(x) dx = -\frac{1}{e^x - 1} + C$  ( $C$  は積分定数)  
(4)  $\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x) dx = 3 \log 2 - \frac{3}{2} \log 3$  ( $= \log \frac{8\sqrt{3}}{9}$  でも可)
- 2** (1)  $0 < p < 1$   
(2)  $q = \frac{1+p}{1-p}$   
(3)  $x > \frac{1}{2}, y > 0$   
(4)  $\frac{x^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{8} = -1$  ( $x > \frac{1}{2}, y > 0$ )  
(5)  $y = 2x - 3$
- 3** (1)  $B^2 = O$   
(2)  $p = n \left( \frac{a+d}{2} \right)^{n-1}, q = (1-n) \left( \frac{a+d}{2} \right)^n$   
(3)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- 4** (1)  $l = \sqrt{3}$   
(2)  $A(1, \sqrt{2}, 0)$   
(3)  $B\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$   
(4)  $PH = \sqrt{2x^2 - 6x + 6}$   
(5)  $V = 3\pi$