

◀2013年 名古屋工業大学(前期)▶

1 関数 $f(x) = \log(x+1) - \frac{1}{2} \log(x^2+1)$ ($x > -1$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の増減を調べて極値を求めよ。
- (2) k を実数とする。 x についての方程式 $f(x) = k$ の相異なる実数解の個数を調べよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$, x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

2 k を正の定数とする。2つの曲線

$$C_1: y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}), \quad C_2: y = k \tan x \quad (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) C_1 と C_2 の交点におけるそれぞれの曲線の接線を l_1, l_2 とする。直線 l_1, l_2 がなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とするとき、 θ の値を求めよ。
- (2) $k = \frac{3}{2}$ のとき、曲線 C_1, C_2 と y 軸で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が条件 $AB = BA$, $c \neq 0$ を満たしている。 $C = A - B$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) b, d を a, c で表せ。
- (2) $B^2 = B$ を満たす B をすべて求めよ。
- (3) (2) で求めた B のそれぞれについて、 C^n を求めよ。ただし n は自然数である。
- (4) A^n を求めよ。ただし n は自然数である。

4 三角形 OAB がある。点 O から直線 AB に下ろした垂線の足を H とする。辺 AB の中点を M とし、 M を通り辺 AB に垂直な直線と直線 OA との交点を N とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とし、 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = p$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{OH} を \vec{a}, \vec{b} および p を用いて表せ。
- (2) \vec{ON} を \vec{a}, \vec{b} および p を用いて表せ。
- (3) $p \geq 0$ であるとき $\frac{ON}{OA}$ の値の範囲を求めよ。
- (4) 点 N が線分 OA を $1:3$ に内分するとき、三角形 OAB の面積 S を求めよ。

出題範囲と難易度

- 1** 標準 III 微分法の実用・積分法の実用
2 標準 III 微分法の実用・積分法の実用
3 標準 C 行列
4 標準 B ベクトル(平面)

略解

1 (1)

x	-1	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2} \log 2$	↘

極大値 $\frac{1}{2} \log 2$ ($x=1$)

$$(2) \begin{cases} k > \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ k = \frac{1}{2} \log 2 \text{ または } k \leq 0 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 0 < k < \frac{1}{2} \log 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(3) $S = \frac{3}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4}$

2 (1) $\theta = \frac{\pi}{2}$

(2) $V = \frac{11}{24} \pi^2 - \frac{5\sqrt{3}}{8} \pi$

3 (1) $b = -6c, d = a - 5c$

(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき, $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき, $C^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n & -3 \cdot 2^{n+1} \\ 2^n & -2^{n+1} \end{pmatrix}$

(4) $A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & -3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2^n - 1 & -2^{n+1} + 3 \end{pmatrix}$

4 (1) $\vec{OH} = \frac{p-4}{2p-13} \vec{a} + \frac{p-9}{2p-13} \vec{b}$

(2) $\vec{ON} = \frac{5}{18-2p} \vec{a}$

(3) $\frac{5}{18} \leq \frac{ON}{OA} < \frac{5}{6}$

(4) $S = \frac{\sqrt{35}}{2}$