

◀2012年 名古屋工業大学(前期)▶

1 3次関数

$$f(x) = x^3 - (1 + 2\cos\theta)x^2 + (1 + 2\cos\theta)x - 1$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ の実数解を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が極値をもつための θ の範囲を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標を $g(\theta)$ と表す。 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で動かしたときの $g(\theta)$ の最大値と最小値、および、そのときの θ の値を求めよ。

2 関数 $f(x) = (4x^3 - 5x)e^{-x^2}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の接線で、原点を通り、かつ傾きが正のものを求めよ。
- (3) (2) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる2つの部分の面積の和を求めよ。

3 a, b は定数で $a \neq 0$ とする。自然数 n に対して、整式 $(ax + b)^n$ を $x^2 + 1$ で割った余りを $a_n x + b_n$ と表し、

$$I_n = \int_0^1 \frac{(ax + b)^n}{x^2 + 1} dx$$

とおく。

- (1) 行列 A は、すべての n に対して、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

を満たす。行列 A を求めよ。

- (2) (1) で求めた行列 A に対し、

$$A^2 + pA + qE = O$$

となる定数 p, q を a, b を用いて表せ。ただし、 E は単位行列、 O は零行列である。

- (3) (2) で求めた p, q に対し、定積分

$$I_{n+2} + pI_{n+1} + qI_n$$

を求めよ。

- (4) $a = 1, b = -1$ のとき、 I_5 を求めよ。

4 円周上に4点 A, B, C, D が反時計回りに並んでいる。直線 AB と直線 DC の交点を E 、線分 AC と BD の交点を F とする。 $AB = 1, BE = 3, AE = 4$ であり、 $\triangle DCF$ の面積は $\triangle ABF$ の面積の4倍である。 $FA = x, FB = y, CE = t, \frac{y}{x} = u$ とおいて、以下の問いに答えよ。

- (1) FC, FD を x, y で表せ。
- (2) t の値を求めよ。
- (3) u の値を求めよ。
- (4) 面積の比の値 $\frac{\triangle AED}{\triangle ABF}$ を求めよ。

出題範囲と難易度

- 1 標準 III 微分法の応用
- 2 標準 III 微分法の応用・積分法の応用
- 3 標準 III 数列の極限・ C 行列
- 4 標準 A 平面図形

略解

- 1 (1) $\begin{cases} \theta = \pi \text{ のとき} & x = \pm 1 \\ \theta \neq \pi \text{ のとき} & x = 1 \end{cases}$
- (2) $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$
- (3) $\begin{cases} \theta = 0 \text{ のとき} & \text{最大値 } 1 \\ \theta = \pi \text{ のとき} & \text{最小値 } -\frac{1}{3} \end{cases}$

2 (1)

x	...	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$...	$-\frac{1}{2}$...	$\frac{1}{2}$...	$\frac{\sqrt{10}}{2}$...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	\searrow		\nearrow		\searrow		\nearrow		\searrow

$$\begin{cases} \text{極大値} & 2e^{-\frac{1}{4}} \left(x = -\frac{1}{2}\right), \quad \frac{5\sqrt{10}}{2}e^{-\frac{5}{2}} \left(x = \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \\ \text{極小値} & -2e^{-\frac{1}{4}} \left(x = \frac{1}{2}\right), \quad -\frac{5\sqrt{10}}{2}e^{-\frac{5}{2}} \left(x = -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \end{cases}$$

(2) $y = 4e^{-\frac{9}{4}}x$

(3) $17e^{-\frac{9}{4}} + 1$

- 3 (1) $A = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$
- (2) $p = -2b, \quad q = a^2 + b^2$
- (3) $\frac{a}{n+1} \{(a+b)^{n+1} - b^{n+1}\}$
- (4) $I_5 = \pi - 2\log 2 - \frac{23}{12}$

4 (1) $FC = 2y, \quad FD = 2x$

(2) $t = -1 + \sqrt{13}$

(3) $u = \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$

(4) $\frac{20 + 8\sqrt{13}}{3}$