◀2010 年　名古屋工業大学（前期）▶

1　四角形 ABCD は次の条件を満たす.

（i）　AB＝BC＝CD＝1

（ii）　BD＝1，∠ABD＝90°

線分 AC と線分 BD との交点を E とする．線分 AB を 3 等分して，点 A に近い分点を M とし，点 B に近い分点を N とする．∠CAB＝α, ∠MDN＝β とおくとき，次の問いに答えよ.

(1)　線分の長さの比の値 $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DE}}$ を求めよ.

(2)　$\tan\beta$ の値を求めよ.

(3)　α と β の大小を判定せよ.

2　定数 a，関数 $f(x)$，および数列 $\{x_n\}$ を次のように定める.

$$1<a<2,\quad f(x)=\frac{1}{2}(3x^2-x^3)$$

$$x_1=a,\quad x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べよ.

(2)　すべての自然数 n に対して $1<x_n<2$ を示せ.

(3)　すべての自然数 n に対して $x_{n+1}>x_n$ を示せ.

(4)　次の不等式を満たす n に無関係な定数 b $(0<b<1)$ があることを示せ.

$$2-x_{n+1}\leqq b(2-x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(5)　数列 $\{x_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ.

3　実数 k を $0<k<2$ とし，2 曲線

$$C_1\ :\ y=\sin 2x\quad (0\leqq x\leqq\pi)$$

$$C_2\ :\ y=k\cos x\quad (0\leqq x\leqq\pi)$$

を考える．C_1 と C_2 および 2 直線 $x=0$, $x=\pi$ で囲まれた 4 つの部分の面積の和を $S(k)$ とする.

(1)　$S(k)$ を求めよ.

(2)　$S(k)$ の最小値とそのときの k を求めよ.

4　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x\sqrt{x}}$ $(x>1)$ に対して次の問いに答えよ．必要ならば, 自然対数の底 e の値は $2<e<3$ であることを用いてよい.

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べよ.

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線 ℓ の方程式を求めよ.

(3)　点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする．(2) で求めた法線 ℓ と x 軸との交点を R とする．2 点 Q, R の距離の最大値を求めよ.

出題範囲と難易度

- **1** 標準　II 三角関数
- **2** やや難　III 数列の極限
- **3** 標準　III 積分法の応用
- **4** 標準　III 微分法の応用

略解

1 (1) $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DE}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2) $\tan\beta = \dfrac{3}{11}$

(3) $\alpha < \beta$

2 (1)

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

(5) 証明は省略．極限値：2

3 (1) $S(k) = k^2 - 2k + 2$

(2) 最小値：1 ($k = 1$)

4 (1)

x	1	$\cdots$	$e^{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

(2) $\dfrac{2-3\log t}{2t^2\sqrt{t}}\left(y - \dfrac{\log t}{t\sqrt{t}}\right) = -(x-t)$

(3) $\dfrac{1}{8e^{\frac{2}{3}}}$