# ◀2009 年　名古屋工業大学（前期）▶

**1**　$a, b$ を正の定数として，直線 $\ell : \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ と曲線 $C : \sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{b}}=1$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 $C$ と $x$ 軸，$y$ 軸で囲まれた部分の面積 $S_1$ を求めよ．

(2)　直線 $\ell$ と曲線 $C$ で囲まれた部分の面積を $S_2$ とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．

**2**　楕円 $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を原点を中心に反時計回りに角 $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転して得られる曲線を $C$ とする．

(1)　曲線 $C$ の方程式を求めよ．

(2)　直線 $y=t$ が $C$ と共有点を持つような実数 $t$ の範囲を求めよ．

(3)　すべての頂点が $C$ 上にあり，1 辺が $x$ 軸に平行な三角形の面積の最大値を求めよ．

**3**　実数 $x$ に対して

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

とおく．

(1)　$f(1)$ を求めよ．

(2)　$x>0$ に対して $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく．$g(x)$ の導関数を求め，$x>0$ に対して等式 $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3)　(2) を利用して極限 $\alpha=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ を求めよ．

(4)　極限 $\lim\limits_{x\to\infty} x(\alpha-f(x))$ を求めよ．

**4**　日本近海にある海域では未確認飛行物体（UFO）が頻繁に目撃されている．あるテレビ局がスクープ映像をねらって取材チームをこの海域に送り込んだ．海面を $xy$ 平面とする空間座標で船舶 1 を点 A(4, 0, 0) に，船舶 2 を点 B(0, 5, 0) に配置し，空中ではヘリコプターが点 C(11, 13, 2) の近くで待機している．

(1)　午後 4 時に船舶 1 からベクトル (2, 3, 3) の方向に，船舶 2 からベクトル (6, −2, 3) の方向に UFO が見えた．午後 4 時における UFO の位置を点 P とするとき，P の座標を求めよ．

(2)　4 分前の 3 時 56 分に UFO は点 Q(2, 0, 3) にいたことが確認された．UFO は方向，速さ一定のまま飛行していると予測される．4 時 $t$ 分における UFO の予測される位置の座標を求めよ．

(3)　UFO の予測飛行ルート上の点で，点 C に最も近い点 R の座標を求めよ．

(4)　UFO 発見の報告で，4 時 5 分にヘリコプターが分速 1 で点 C から (3) の点 R に向かって直進した．ヘリコプターと UFO のどちらが先に点 R に到着したか．理由とともに答えよ．

## 出題範囲と難易度

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | 標準 | III | 積分法の応用 |
| **2** | 標準 | C | 1 次変換・いろいろな曲線 |
| **3** | 標準 | III | 積分法の応用 |
| **4** | 標準 | B | ベクトル（空間） |

# 略解

**1** （1） $S_1=\dfrac{1}{20}ab$

（2） $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{9}$

**2** （1） $4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2-21=0$

（2） $-2\leqq t\leqq 2$

（3） $\dfrac{9\sqrt{7}}{4}$ （$t=1$）

**3** （1） $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$

（2） $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2+1}$，証明は省略

（3） $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

（4） $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\alpha-f(x))=1$

**4** （1） P(6, 3, 3)

（2） $\left(t+6,\ \dfrac{3}{4}t+3,\ 3\right)$

（3） R(14, 9, 3)

（4） UFO が先に着く．理由は省略