◀2007 年　名古屋工業大学（前期）▶

1　n を自然数とする．曲線 $C : y = \dfrac{1}{n}x^{n+1} + 1\ (x \geqq 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ における接線 ℓ が原点を通っている．ただし，$a > 0$ とする．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　曲線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

2　次の問いに答えよ．

(1)　方程式 $x^2 \tan x = 1\ \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つの実数解 α をもつことを示せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} e^{-\frac{1}{x}}\cos x$ を求めよ．

(3)　c を実数とする．方程式 $e^{-\frac{1}{x}}\cos x = c\ \left(0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が異なる 2 つの実数解をもつような c の値の範囲を (1) の α を用いて表せ．

3　放物線 $y^2 = 4px\ (p > 0)$ 上に 4 点があり，それらを y 座標の大きい順に A, B, C, D とする．線分 AC と BD は放物線の焦点 F で垂直に交わっている．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ が x 軸の正の方向となす角を θ とする．

(1)　線分 AF の長さを p と θ を用いて表せ．

(2)　$\dfrac{1}{\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}} + \dfrac{1}{\mathrm{BF}\cdot\mathrm{DF}}$ は θ によらず一定であることを示し，その値を p を用いて表せ．

4　x 軸上を点 A が次の規則にしたがって動くとする．

1 回サイコロを振るごとに，

- 5 以下の目が出ると，x 軸の正の方向に 1 進む．
- 6 の目が出ると，原点に移動する．ただし，原点にある場合はその位置にとどまる．

点 A は最初に原点にあるとする．

(1)　3 回サイコロを振った後の点 A が $x = 2$ にある確率を求めよ．

(2)　n を自然数，k を $0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数とする．n 回サイコロを振った後の点 A が $x = k$ にある確率 p_k を求めよ．

(3)　n を自然数とする．n 回サイコロを振った後の点 A の x 座標の期待値 E_n を求めよ．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n$ を求めよ．

出題範囲と難易度

1　標準　III 積分法の応用

2　標準　III 微分法の応用

3　標準　C いろいろな曲線

4　標準　A 確率・III 数列の極限

略解

1 (1) $a=1$

(2) $S_n=\dfrac{n+1}{2(n+2)}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

2 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}e^{-\frac{1}{x}}\cos x=0$

(3) $0<c<e^{-\frac{1}{\alpha}}\cos\alpha$

3 (1) $\mathrm{AF}=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}$

(2) 証明は省略．$\dfrac{1}{4p^2}$

4 (1) $\dfrac{25}{216}$

(2)
$$p_k=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^k & (0\leqq k\leqq n-1)\\ \left(\dfrac{5}{6}\right)^n & (k=n)\end{cases}$$

(3) $E_n=5-5\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n=5$