◀2006 年　名古屋工業大学（前期）▶

1　原点を O とする座標空間内に 3 点 A(3, 0, 0), B(0, 2, 0), C(p, q, 2) がある．$\angle \mathrm{AOC} = \dfrac{\pi}{4}$, $\angle \mathrm{BOC} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　p, q を求めよ．

(2)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(3)　原点 O から 3 点 A, B, C を通る平面に下ろした垂線の足を H とする．線分 OH の長さを求めよ．

2　初項が $a_1 = 2$ である数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 n 項までの逆数の和 $R_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ は $R_n = 1 - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$　($n = 1, 2, 3, \cdots$) をみたしている．このとき次の問いに答えよ．

(1)　a_2, a_3 を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3)　数学的帰納法により，$n \geqq 2$ のとき不等式 $a_n \geqq n + 1$ が成り立つことを示せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} R_n$ を求めよ．

3　座標平面上に曲線 $C_1 : y = e^{\sqrt{3}x}$ がある．点 A(a, b) を中心とする半径 r の円 C_2 は，点 P(0, 1) において曲線 C_1 と接線を共有し，かつ x 軸の正の部分と接している．円 C_2 と x 軸との接点を Q とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　a, b および r を求めよ．

(2)　点 A を通り x 軸に平行な直線と曲線 C_1 との交点を B とする．曲線 C_1 と線分 AB および弧 PQ で囲まれた部分の面積を求めよ．

4　関数 $f(x) = 2x + 5\sin x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフを曲線 C とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の極値とそのときの x の値とを求めよ．

(2)　曲線 C の変曲点を求めよ．

(3)　曲線 C の変曲点における C の接線を ℓ とする．曲線 C，接線 ℓ および y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

1　標準　B　ベクトル（空間）

2　標準　III　数列の極限

3　標準　III　積分法の応用

4　標準　III　微分法の応用・積分法の応用

略解

1 (1) $p = 2\sqrt{2},\ q = 2$

(2) $\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{21}$

(3) $\mathrm{OH} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

2 (1) $a_2 = 3,\ a_3 = 7$

(2) $a_{n+1} = (a_n)^2 - a_n + 1\ (n \geqq 2)$

(3) 証明は省略

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = 1$

3 (1) $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ b = \dfrac{2}{3},\ r = \dfrac{2}{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{6} - \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\log\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{27}$

4 (1)

極大値 ： $\dfrac{4}{3}\pi + \dfrac{11\sqrt{3}}{4}\ \left(x = \dfrac{2}{3}\pi\right)$

極小値 ： $\dfrac{8}{3}\pi - \dfrac{11\sqrt{3}}{4}\ \left(x = \dfrac{4}{3}\pi\right)$

(2) $(\pi,\ 2\pi)$

(3) $3\pi^2 - 10$