◀1995 年　名古屋工業大学（前期）▶

1　直線

$$\ell : x-1=\frac{y+1}{3}=1-z$$

を含み，球面

$$S : x^2+y^2+z^2-4x+8y-12z+50=0$$

に接する平面の方程式を求めよ．

2　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ (a, b, c は定数で $a>0, b>0, c>0$) で表される 1 次変換 f によって，原点を中心とし半径 1 の円が，面積 5π の円に移るとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a, b, c を求めよ．

(2)　中心 (p, q)，半径 r の円の f による像はどのような曲線か．

3　xy 平面上で 2 点 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 0)$ を結ぶ線分を n 等分して，その分点を O に近いものから順に P_1, P_2, ……, P_{n-1} とし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{A}$ とする．点 P_i から放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ へ引いた x 軸とは異なる接線 L_i の放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ との接点を Q_i, L_i と直線 $x=2$ との交点を R_i とする ($i=1, 2, \cdots\cdots, n$)．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 Q_i および R_i の座標を求めよ．

(2)　3 点 $\mathrm{B}(2, 0)$ および Q_i, R_i を頂点とする三角形 $\mathrm{BQ}_i\mathrm{R}_i$ の面積 S_i を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i$ を求めよ．

4　t は $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．xyz 空間内の 4 つの点

$$\mathrm{O}(0, 0, 0),\ \mathrm{A}(\cos^3 t, 0, 0),\ \mathrm{B}(0, \sin^3 t, 1),\ \mathrm{C}(0, 0, 1)$$

をこの順に結んでできる折れ線 OABC を z 軸のまわりに 1 回転して得られる立体 R の体積を $V(t)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 $(0, 0, z)$ (ただし，$0\leqq z\leqq 1$) を通り z 軸に垂直な平面 P による回転体 R の切り口の面積 $S(z)$ を求めよ．

(2)　$V(t)$ を求めよ．

(3)　t が，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で変化するとき，$V(t)$ の最大値および最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

1　標準　代幾　平面の方程式

2　標準　代幾　1 次変換

3　基本　微積　微分法の応用・積分法の応用

4　標準　微積　微分法の応用・積分法の応用

略解

1　$x-y-2z=0$，$7x-2y+z-10=0$

2　(1)　$a=1$，$b=2$，$c=-2$

(2)　$(p+2q,\ -2p+q)$ を中心とし，半径 $\sqrt{5}r$ の円

3　(1)　$\mathrm{Q}_i\left(\dfrac{2i}{n},\ \left(\dfrac{i}{n}\right)^2\right)$，　$\mathrm{R}_i\left(2,\ \dfrac{2i}{n}-\left(\dfrac{i}{n}\right)^2\right)$

(2)　$S_i=\left(1-\dfrac{i}{n}\right)\left\{\dfrac{2i}{n}-\left(\dfrac{i}{n}\right)^2\right\}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}S_i=\frac{1}{4}$

4　(1)　$S(z)=\pi\{(1-z)^2\cos^6 t+z^2\sin^6 t\}$

(2)　$V(t)=\dfrac{\pi}{3}(\cos^6 t+\sin^6 t)$

(3)　$\begin{cases} \text{最小値 } \dfrac{\pi}{12} & \left(t=\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \text{最大値 } \dfrac{\pi}{3} & \left(t=\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$