◀2012 年　名古屋大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする．

(1)　C 上の点 $\mathrm{A}(t,\,t^3-a^2t)$ における C の接線を ℓ とする．ℓ と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ．ただし，t は 0 でないとする．

(2)　b を実数とする．C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\,b)$ を通るものの本数を求めよ．

(3)　C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\,b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を $\ell_1,\,\ell_2$ とする．ただし，ℓ_1 と ℓ_2 はどちらも原点 $(0,\,0)$ を通らないとする．ℓ_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，ℓ_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ．

2　$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，

$$f_n(x)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt+f'_{n-1}(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める．

(1)　$f_1(x)$ を求めよ．

(2)　$g(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}(at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ．ただし，実数 $a,\,b,\,c$ は定数とする．

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ．

3　n を 2 以上の整数とする．1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある．ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする．この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す．この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする．次の問に答えよ．ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする．また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする．

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ．

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ．

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする．$P(s)$ を求めよ．

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ．

4　$m,\,p$ を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする．

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ．

(2)　$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ．

(3)　$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ．

(4)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする．2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ．

♠ 文系学部

1　xy 平面上に，点 $(0,\,1)$ を通り，傾きが h の直線 ℓ がある．

(1)　xy 平面において，ℓ に関して点 $\mathrm{P}(a,\,b)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(s,\,t)$ とする．このとき，$a,\,b,\,h$ を用いて s，t を表せ．ただし，点 $\mathrm{P}(a,\,b)$ は ℓ 上にないとする．

(2) xy 平面において，ℓ に関して原点 $\mathrm{O}(0, 0)$ と対称な点を A とする．h が $-1 \leqq h \leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ．

(3) h が $-1 \leqq h \leqq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする．C と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　m を正の奇数とする．

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ．

(2) p を正の整数とするとき，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ．

(3) r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする．2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

2　やや難　$\boxed{\text{B}}$ 数列・$\boxed{\text{III}}$ 積分法

3　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

4　やや難　$\boxed{\text{I}}$ 整数問題・$\boxed{\text{B}}$ 数列

♣ 文系学部

1　標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

2　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

3　やや難　$\boxed{\text{I}}$ 整数問題・$\boxed{\text{B}}$ 数列

略解

◇ 理系学部

1 （1） $S(t) = \dfrac{27}{4}t^4$

（2） $\begin{cases} b < -2a^3,\ 6a^3 < b \text{ のとき} & 1 \text{ 本} \\ b = -2a^3,\ 6a^3 \text{ のとき} & 2 \text{ 本} \\ -2a^3 < b < 6a^3 \text{ のとき} & 3 \text{ 本} \end{cases}$

（3） $\dfrac{S_1}{S_2} = 16$

2 （1） $f_1(x) = 2xe^x + (x+1)e^{-x}$

（2） $\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)\,dx = 0$

（3） $f_{2n}(x) = (3^n x + 2n \cdot 3^{n-1})e^x$

3 （1） $\dfrac{(k+1)^3}{n^3}$

（2） $\dfrac{6k}{n^3}$

（3） $P(s) = \dfrac{6s(n-s)}{n^3}$

（4） $s = \dfrac{n}{2}$

4 （1） -5050

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

（4） 証明は省略

◇ 文系学部

1 （1） $s = \dfrac{(1-h^2)a + 2hb - 2h}{h^2+1},\quad t = \dfrac{2ha + (h^2-1)b + 2}{h^2+1}$

（2） $\begin{cases} \text{最大値 } 2 & (h = 0) \\ \text{最小値 } \sqrt{2} & (h = \pm 1) \end{cases}$

（3） $\dfrac{\pi}{2}$

2 理系学部 **3** と同じ.

3 （1） -5050

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略