◀2012 年　三重大学（前期）▶

♠ 医学部

1　実数 x に対し，$[x]$ を x 以下の最大の整数とする．すなわち，$[x]$ は整数であり $[x] \leqq x < [x]+1$ を満たすとする．たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{3}\right]=1$ である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　すべての実数 a とすべての整数 m に対し，$[a+m]=[a]+m$ が成り立つことを示せ．

(2)　数列 $\{a_k\}$ を $a_k=\left[\dfrac{2k}{3}\right]$ $(k=1, 2, \cdots)$ と定める．自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

2　$\angle$AOB が直角，OA : OB $= 2 : 1$ である三角形 OAB がある．s は $0<s<1$ とし，辺 AB を $s : (1-s)$ に内分する点を P とし，OP を $s : (1-s)$ に内分する点を Q とする．また，線分 AQ の延長と OB の交点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ が直交するとき，以下の問いに答えよ．

(1)　s の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とおくとき，t の値を求めよ．

(3)　三角形 OQR の面積と三角形 BPQ の面積の比を，最も簡単な整数の比で表せ．

3　表の出る確率が p $(0<p<1)$ のコインを投げ，表が出れば 5 点を得，裏が出れば 1 点を得るものとする．コインを投げ続けるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　n 回投げたときの得点の取りうる値をすべて求めよ．また，得点がそれぞれの値となる確率を求めよ．

(2)　10 回コインを投げて，得点が 14 点以下になる確率を求めよ．

4　以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=|x|-e^{-x}$ の増減を調べよ．

(2)　実数 α で $|\alpha|-e^{-\alpha}=0$ を満たすものがひとつだけ存在することを示せ．さらに，この α は，$0<\alpha<1$ を満たすことを示せ．

(3)　(2) の α と正の整数 n に対して，

$$I_n=\int_0^{\alpha}(xe^{-nx}+\alpha x^{n-1})\,dx$$

とおく．I_n を α の多項式として表せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n$ を求めよ．

♠ 工学部

1　実数 x に対し，$[x]$ を x 以下の最大の整数とする．たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{7}{5}\right]=1$ である．数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k=\left[\frac{3k}{5}\right] \quad (k=1, 2, \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 を求めよ．

(2)　$a_{k+5}=a_k+3$ $(k=1, 2, \cdots)$ を示せ．

(3)　自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{5n} a_k$ を求めよ．

2　座標平面上で $y=x+1$ で表される直線を ℓ とする．また，4 点 A$(-1,\,1)$，B$(0,\,-2)$，C$(3,\,1)$，D$(1,\,3)$ をとる．以下の問いに答えよ．

(1)　領域 $R_1=\{(x,\,y)\,|\,y>x+1\}$ と $R_2=\{(x,\,y)\,|\,y\leqq x+1\}$ を考える．4 点 A, B, C, D はそれぞれ，領域 R_1, R_2 のどちらにあるか答えよ．

(2)　k を定数とし，直線 $y=x+k$ 上に点 E$(x,\,x+k)$ をとる．E と直線 ℓ の距離が $\sqrt{2}$ となる k の値をすべて求めよ．

(3)　四角形 ABCD の周または内部で，直線 ℓ との距離が $\sqrt{2}$ 以下となる点の範囲を図示せよ．

(4)　点 P$(x,\,y)$ が (3) で求めた範囲を動くとき，$2x+y$ がとる値の最小値と最大値を求めよ．

3　医学部 **3** と同じ．

4　以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=x-e^{-x}$ の増減を調べよ．

(2)　実数 α で $\alpha-e^{-\alpha}=0$ を満たすものがひとつだけ存在することを示せ．さらに，この α は，$0<\alpha<1$ を満たすことを示せ．

(3)　(2) の α と正の整数 n に対して，

$$I_n=\int_0^{\alpha}(xe^{-nx}+\alpha x^{n-1})\,dx$$

とおく．I_n を α の多項式として表せ．また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2I_n$ を求めよ．

♠ 人文・教育・生物資源学部

✐注：人文学部は，**1**〜**3**, **6** 必答．教育・生物資源学部は，**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．

1　工学部 **1** と同じ．

2　工学部 **2** と同じ．

3　医学部 **3** と同じ．

4　媒介変数 θ を用いて $x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される曲線がある．

(1)　この曲線について θ を消去して，x, y の方程式を求め，その概形をかけ．

(2)　曲線上の点 P$(2\cos\theta,\,3\sin\theta)$ での接線の方程式を求めよ．

(3)　(2) で求めた接線と x 軸，y 軸とで作られる三角形の面積 S を θ の関数として表せ．

5　h を $0<h<1$ を満たす実数とし，

$$f(x)=\left|x^2-\frac{2}{h}x\right|+2x+1,\quad g(x)=-\left|x^2-\frac{2}{h}x\right|+2x+1$$

とする．

(1)　2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる図形の面積 $S(h)$ を求めよ．

(2)　(1) で定めた図形を含む，各辺が x 軸または y 軸に平行であるような長方形のうち，面積が最小となるものの面積を $T(h)$ とする．h が 0 に限りなく近づくとき，$\dfrac{T(h)}{S(h)}$ の極限値を求めよ．

6　h を $0<h<1$ を満たす実数とし，

$$f(x)=x^2+2\left(1-\frac{1}{h}\right)x+1,\quad g(x)=-x^2+2\left(1+\frac{1}{h}\right)x+1$$

とする．

(1)　2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれる図形の面積 $S(h)$ を求めよ．

(2)　(1) で定めた図形を含む，各辺が x 軸または y 軸に平行であるような長方形のうち，面積が最小となるものの面積を $T(h)$ とする．h が 0 に限りなく近づくとき，$\dfrac{T(h)}{S(h)}$ の極限値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医学部

- **1**　標準　B　数列
- **2**　標準　B　ベクトル（平面）
- **3**　標準　A　確率
- **4**　標準　III　微分法の応用・積分法の応用

♣ 工学部

- **1**　標準　B　数列
- **2**　標準　II　図形と方程式
- **3**　標準　A　確率
- **4**　標準　III　微分法の応用・積分法の応用

♣ 人文・教育・生物資源学部

- **1**　標準　B　数列
- **2**　標準　II　図形と方程式
- **3**　標準　A　確率
- **4**　標準　II　微分積分
- **5**　標準　II　微分積分
- **6**　標準　II　微分積分

略解

◇ 医学部

1 (1)　証明は省略

(2) $\begin{cases} n \text{ が 3 の倍数のとき} & \dfrac{n^2}{3} \\ n \text{ が 3 の倍数でないとき} & \dfrac{n^2-1}{3} \end{cases}$

2 (1)　$s = \dfrac{3}{5}$

(2)　$t = \dfrac{25}{19}$

(3)　$\triangle \mathrm{OQR} : \triangle \mathrm{BPQ} = 27 : 38$

3 (1)　$n,\ n+4,\ n+8,\ \cdots,\ 5n-8,\ 5n-4,\ 5n$

${}_n\mathrm{C}_{\frac{x-n}{4}}\, p^{\frac{x-n}{4}}(1-p)^{\frac{5n-x}{4}}$

(2)　$(1-p)^9(1+9p)$

4 (1)　単調増加

(2)　証明は省略

(3)　$I_n = -\dfrac{1}{n^2}\alpha^n + \dfrac{1}{n^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n = 1$

◇ 工学部

1 (1)　$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 2,\ a_5 = 3$

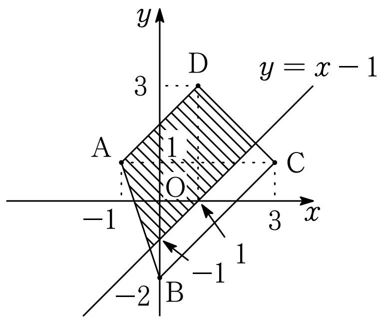
(2)　証明は省略

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5n} a_k = \frac{1}{2}n(15n-1)$

2 (1)　A, D は R_1 にあり，B, C は R_2 にある．

(2)　$k = -1, 3$

(3)　右図斜線部分で境界線上の点を含む．



(4) $\begin{cases} \text{最大値} & \dfrac{13}{2} & (x, y) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \\ \text{最小値} & -\dfrac{7}{4} & (x, y) = \left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{5}{4}\right) \end{cases}$

3　医学部 **3** と同じ．

4 (1)　単調増加

(2)　証明は省略

(3)　$I_n = -\dfrac{1}{n^2}\alpha^n + \dfrac{1}{n^2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 I_n = 1$

◇ 教育・生物資源学部

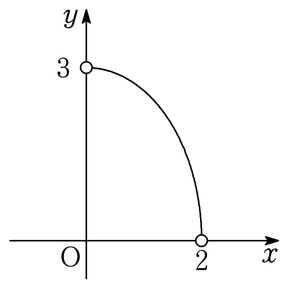
1　工学部 **1** と同じ.

2　工学部 **2** と同じ.

3　医学部 **3** と同じ.

4　(1)　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\quad 0<x<2,\quad 0<y<3$

グラフの概形は右図.



(2)　$(3\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=6$

(3)　$S=\dfrac{3}{\sin\theta\cos\theta}$

5　(1)　$S(h)=\dfrac{8}{3h^3}$

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{T(h)}{S(h)}=\frac{3}{2}$

6　(1)　$S(h)=\dfrac{8}{3h^3}$

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{T(h)}{S(h)}=\frac{3}{2}$