◀2011 年　三重大学（前期）▶

♠ 医学部

1　次のふたつの方程式を考える．

$x^2+y^2=z^2 \quad \cdots ①$

$s^2+t^2=u^2+1 \quad \cdots ②$

(1)　実数 $a,\,b$ に対し実数 $a^*,\,b^*$ を $a^*=a+b,\ b^*=2a+b+1$ で定める．$(x,\,y,\,z)=(a,\,a+1,\,b)$ が ① の解ならば $(s,\,t,\,u)=(a^*,\,a^*+1,\,b^*)$ は ② の解であることを示せ．また，逆に $(s,\,t,\,u)=(a,\,a+1,\,b)$ が ② の解ならば $(x,\,y,\,z)=(a^*,\,a^*+1,\,b^*)$ は ① の解であることを示せ．

(2)　方程式 ① の自然数解 $(x,\,y,\,z)$ をピタゴラス数という．$y=x+1$ を満たすピタゴラス数を 3 組あげよ．

2　c を定数として数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める．

$$a_1=c+1,\quad a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+1\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

(1)　$a_2,\,a_3,\,a_4$ を求めよ．また一般項 a_n の形を推定し，その推定が正しいことを証明せよ．

(2)　$c=324$ のとき，a_n の値が自然数となるような n をすべて求めよ．

3　t を実数として 2 次正方行列 $A_t=\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$ を考える．

(1)　すべての実数 t に対し A_t が逆行列を持つことを示し，その逆行列 $A_t{}^{-1}$ を求めよ．

(2)　各実数 t に対し座標平面上の点 $(x_t,\,y_t)$ を条件 $\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\end{pmatrix}=A_t{}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ によって定める．t がすべての実数を動くとき $(x_t,\,y_t)$ が描く図形を求めて図示せよ．

4　関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2x}+\tan x$，$g(x)=x\cos(x^2)$ について以下の問いに答えよ．

(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある α で $f(\alpha)=0$ となるものがただひとつ存在することを示せ．

(2)　閉区間 $\left[0,\ \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right]$ における $g(x)$ の増減表をかけ．必要ならば (1) の α を用いてよい．

(3)　$0<\beta<\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ の範囲にあり $g'(\beta)=0$ を満たす β を (1) の α を用いて表せ．また $g(x)=x\cos(x^2)$ $(0\leqq x\leqq \beta)$ の逆関数を $h(x)$ とする．このとき $y=g(x)$ のグラフと $y=h(x)$ のグラフの関係に注意して，定積分 $\displaystyle\int_0^{g(\beta)} h(x)\,dx$ を α を用いて表せ．

♠ 工学部

1　医学部 **1** と同じ．

2　四面体 OABC において $\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\sqrt{2},\ \mathrm{OB}=\sqrt{5},\ \mathrm{AB}=3$ であり，$\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{2}$ であるとする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，以下の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a}\cdot\vec{c},\ \vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2)　線分 AB を 1 : 2 に内分する点を D とし，点 O から直線 CD に引いた垂線と直線 CD の交点を H とす

るとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ．また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$ を求めよ．

3　関数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ のグラフを曲線 C とし，曲線 C を x 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ だけ平行移動した曲線を C' とする．

(1)　$f(x)$ の増減と極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を調べて曲線 C の概形を描け．

(2)　曲線 C と曲線 C' の共有点の x 座標を求めよ．

(3)　2 曲線 C, C' で囲まれた領域の面積を求めよ．

4　医学部 **3** と同じ．

♠ 人文・教育・生物資源学部

✏注：人文学部は，**1**～**3**，**5** 必答．教育・生物資源学部は，**1**～**3** 必答・**4**，**5** から 1 題選択．

1　医学部 **1** と同じ．

2　座標平面において直線 $\ell : y = ax + b$ と直線 $m : y = 2x$ を考える．

(1)　2 点 $(0, 0)$，$(2, 0)$ から直線 ℓ までの距離が一致するための a, b についての必要十分条件を求めよ．

(2)　(1) の条件のもとで 2 直線 ℓ, m のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるとき a, b の値を求めよ．ただし 2 直線のなす角 θ は常に $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えるものとする．

3　工学部 **2** と同じ．

4　ふたつの曲線

$$C_1 : y = \cos x \ (0 \leqq x \leqq 2\pi), \quad C_2 : y = \sin \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

が囲む領域を D とする．ただし D は境界を含むものとする．

(1)　C_1 と C_2 の交点の x 座標を求め，D の面積を求めよ．

(2)　点 (x, y) が D 内を動くとき，$\dfrac{1}{2}x + y$ の最大値と最小値を求めよ．

5　関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \big|t - |x|\big|\,dt$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$y = f(x)$ のグラフを描け．

(2)　定数 k に対し $f(x) = kx$ を満たす x の個数を調べよ．

(3)　$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -x + \dfrac{7}{2}$ と y 軸の 3 つで囲まれた図形の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医学部

- **1** ややや難 [I] 整数問題
- **2** 標準 [B] 数列
- **3** 標準 [C] 行列・１次変換
- **4** 標準 [III] 微分法の応用・積分法の応用

♣ 工学部

- **1** やや難 [I] 整数問題
- **2** 標準 [B] ベクトル（空間）
- **3** 標準 [III] 微分法の応用・積分法の応用
- **4** 標準 [C] 行列・１次変換

♣ 人文・教育・生物資源学部

- **1** やや難 [I] 整数問題
- **2** 標準 [II] 図形と方程式・三角関数
- **3** 標準 [B] ベクトル（空間）
- **4** 標準 [III] 微分法の応用・積分法の応用
- **5** 標準 [II] 微分積分

略解

◇ 医学部

1 (1)　証明は省略

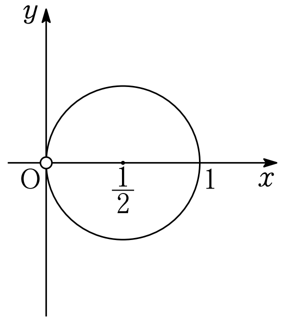
(2)　(3, 4, 5), (20, 21, 29), (119, 120, 169)

2 (1)　$a_2 = \dfrac{c}{2} + \dfrac{3}{2}$, $a_3 = \dfrac{c}{3} + 2$, $a_4 = \dfrac{c}{4} + \dfrac{5}{2}$, 証明は省略

(2)　$n = 1, 3, 8, 9, 24, 27, 72, 81, 216, 648$

3 (1)　$A_t{}^{-1} = \dfrac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$

(2)　$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$　ただし，点 (0, 0) は除く．



4 (1)　証明は省略

(2)

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\alpha}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$
$g'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\pi$
$g(x)$	0	↗		↘	0

(3)　$\beta = \sqrt{\alpha}$, $\displaystyle\int_0^{g(\beta)} h(x)\,dx = \alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$

◇ 工学部

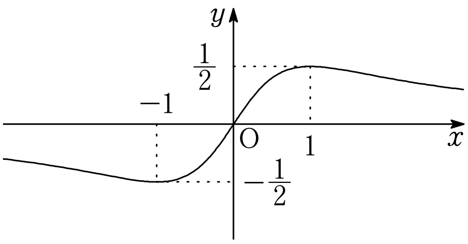
1　医学部 **1** と同じ．

2 (1)　$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{4}{9}\vec{a} + \dfrac{2}{9}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

3 (1)

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$(+\infty)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	(0)



(2)　$x = -\dfrac{1}{2}, 2$

(3)　$2\log 2$

4　医学部 **3** と同じ．

◇ 教育・生物資源学部

1　医・工学部 **1** と同じ.

2 (1) $a=0$ または $a+b=0$

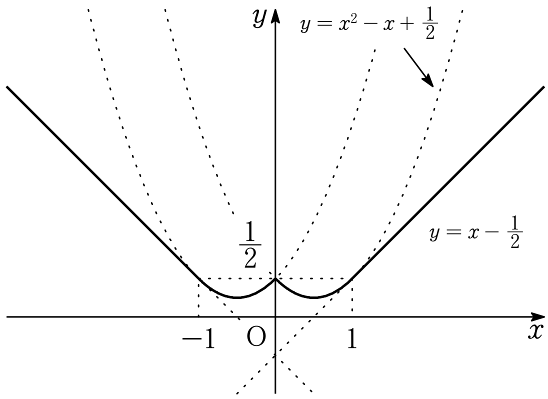
(2) $(a,\,b)=\left(\dfrac{1}{3},\,-\dfrac{1}{3}\right)$, $(-3,\,3)$

3　工学部 **2** と同じ.

4 (1) $x=\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5}{4}\pi$,　面積は $2\sqrt{2}$

(2)
$$\begin{cases} \text{最大値}: \dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (x,\,y)=\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \text{最小値}: \dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (x,\,y)=\left(\dfrac{5}{6}\pi,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

5 (1) グラフは下図太線部分.



(2)
$$\begin{cases} k \leqq -1,\ 1 \leqq k \text{ のとき}, & 1 \text{ 個} \\ -1<k<-\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}-1<k<1 \text{ のとき}, & 2 \text{ 個} \\ k=-\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}-1 \text{ のとき}, & 1 \text{ 個} \\ -\sqrt{2}+1<k<\sqrt{2}-1 \text{ のとき}, & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

(3) $\dfrac{11}{3}$