◀2009年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

✎注：医学部は，**1**〜**4** 必答．工学部は，**1**, **5**〜**7** 必答．

1 a, b, c, α, β を実数とする．

(1) 2 次不等式 $ax^2+bx+c \geqq 0$ の解が $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるような a, b, c を求めよ．ただし，$|b|=1$ とする．

(2) θ に関する不等式 $\alpha\sin\theta\tan\theta+\beta\cos\theta+\tan\theta \geqq 0$ の，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲での解が $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ となるような α, β を求めよ．

2 以下の問に答えよ．

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)P$ を満たす x, y, z についての整式 P を求めよ．

(2) 0 以上の数 α, β, γ に対し，その相加平均 $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ が相乗平均 $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ 以上になることを示せ．

(3) x の方程式 $x^3-(3+\cos\theta)x^2+(3-\cos\theta)x-1=0$ の解 α, β, γ がすべて正であるような θ を求め，そのときの方程式を解け．ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

3 O, P, Q を，それぞれの座標が $(0, 0)$, $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(-1, 0)$ で与えられる平面上の点とする．また，$0 \leqq \theta < \pi$ として，点 P, Q を通る直線と，y 軸との交点を $\mathrm{R}(0, t)$ とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) $\angle\mathrm{RQO}$ を θ で表せ．また t を θ の関数として表せ．

(2) Q, R を通る直線の方程式を t を用いて表せ．この直線と，O を中心とする半径 1 の円との交点を t を用いて表せ．また $\cos\theta, \sin\theta$ を t で表せ．

(3) θ を t の関数と見たとき，$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ となることを示せ．

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\theta-\cos\theta}\,d\theta$ を求めよ．

4 行列 X を

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

とおく．このとき次の問に答えよ．

(1)
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -4 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき A^2, B^2, AB, BA を求めよ．

(2) (1) の A, B に対して $X=aA+bB$ を満たす定数 a, b を求めよ．

(3) 正の整数 n に対し，X^n を求めよ．

(4) $X+X^2+X^3+\cdots$ を求めよ．

5 以下の問に答えよ．

(1) 0 以上の 2 数 α, β について，相加平均 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が相乗平均 $\sqrt{\alpha\beta}$ 以上であることを証明せよ．

(2)　$a>0, b>0, m>0$ とする．座標平面上で点 (a, b) を通り，傾きが $-m$ の直線の，x 軸，y 軸との交点をそれぞれ求めよ．

(3)　(2) のふたつの交点と原点の 3 点を頂点とする三角形の面積の，m を変化させたときの最小値を求めよ．

6　O, P, Q を，それぞれの座標が $(0, 0)$, $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(-1, 0)$ で与えられる平面上の点とする．また，$0 \leqq \theta < \pi$ として，点 P, Q を通る直線と，y 軸との交点を $\mathrm{R}(0, t)$ とする．このとき以下の問に答えよ．

(1)　$\angle \mathrm{RQO}$ を θ で表せ．また t を θ の関数として表せ．

(2)　Q, R を通る直線の方程式を t を用いて表せ．この直線と，O を中心とする半径 1 の円との交点を t を用いて表せ．また $\cos\theta, \sin\theta$ を t で表せ．

(3)　θ を t の関数と見たとき，$\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$ となることを示せ．

(4)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta$ を求めよ．

7　2 次の正方行列 A, B をそれぞれ，

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},\quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

のように定めるとき，以下の問に答えよ．

(1)　A^2, B^2, AB および BA を計算せよ．

(2)　正の整数 n について，$(A+B)^n = a_nA + b_nB$ と書けることを証明し，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するかどうか調べ，収束するならばその値も求めよ．

♠ 教育・生物資源学部

✎注：**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．

1　医・工学部 **1** と同じ．

2　サイコロを 2 回ふって，1 回目に出た目の数を M, 2 回目に出た目の数を N とする．出た目に応じて 2 つのベクトル

$$\vec{a} = \left(\cos\frac{M}{3}\pi,\ \sin\frac{M}{3}\pi\right),\quad \vec{b} = \left(\cos\frac{N}{3}\pi,\ \sin\frac{N}{3}\pi\right)$$

を定める．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書くとき，次の問に答えよ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{1}{2}$ となる確率を求めよ．

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ となる確率を求めよ．

(3)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の期待値を求めよ．

3　直線 $y = -x - a^2 - a + 1$ を l，円 $(x-a-1)^2 + (y+a^2+a)^2 = 1$ を O とする．円 O の中心を $\mathrm{P}(x, y)$ とおくとき，以下の問に答えよ．

(1)　a があらゆる実数の値を取るとき，$\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡を求め，図示せよ．

(2)　l と O とが共有点を持つとき，a が取る値の範囲を求めよ．また，このときの $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡を C とする．C は (1) で求めた曲線のどの部分か，図示せよ．

(3)　点 (x, y) が (2) で求めた曲線 C 上にあるとき，$x+y$ が取る値の最小値を求めよ．また，そのときの

x, y の値も求めよ．

4　$f(x) = x\sin x + \cos x + 1\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ とする．

(1)　$f(x)$ の導関数を求めよ．

(2)　$f(x)$ の最大値，最小値を求めよ．

(3)　$0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で $y = f(x)$ のグラフと x 軸，y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

5　関数 $f(x) = |x^3| - \left|x^2(x-3)\right| + 2$ について以下の問に答えよ．

(1)　$f(x)$ の増減，極値を調べ，グラフを描け．

(2)　定数 k について，$f(x) = k$ を満たす x の個数を調べよ．

(3)　$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = -x$ ，および x 軸の 3 つで囲まれた図形の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

1　標準　$\boxed{\text{I}}$ 2 次関数・$\boxed{\text{II}}$ 三角関数

2　標準　$\boxed{\text{II}}$ 式と証明・高次方程式

3　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用

4　標準　$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限・$\boxed{\text{C}}$ 行列

5　標準　$\boxed{\text{II}}$ 式と証明・図形と方程式

6　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用

7　標準　$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限・$\boxed{\text{C}}$ 行列

♣ 教育・生物資源学部

1　標準　$\boxed{\text{I}}$ 2 次関数・$\boxed{\text{II}}$ 三角関数

2　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 平面ベクトル

3　標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・

4　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用

5　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

略解

◇ 医・工学部

1 (1) $a=1-\sqrt{3},\quad b=1,\quad c=\dfrac{\sqrt{3}-3}{4}$

(2) $\alpha=\dfrac{1-3\sqrt{3}}{4},\quad \beta=\dfrac{\sqrt{3}-3}{4}$

2 (1) $P=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$

(2) 証明は省略

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\quad x=1$

3 (1) $\angle\mathrm{RQO}=\dfrac{\theta}{2},\quad t=\tan\dfrac{\theta}{2}$

(2) 直線 QR：$y=tx+t$，交点 $(-1,\ 0)$，$\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$

$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$

(3) 証明は省略

(4) $\log\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

4 (1) $A^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & -4 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix},\quad AB=O,\quad BA=O$

(2) $a=-\dfrac{1}{2},\quad b=\dfrac{1}{2}$

(3) $X^n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n A+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n B$

(4) $\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{16}{3} & -\dfrac{8}{3} & -\dfrac{10}{3} \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

5 (1) 証明は省略

(2) x 軸との交点：$\left(a+\dfrac{b}{m},\ 0\right)$，$y$ 軸との交点：$(0,\ am+b)$

(3) $2ab$

6 (1) $A^2=\dfrac{3}{16}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},\quad B^2=\dfrac{3}{4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},\quad AB=O,\quad BA=O$

(2) 証明は省略．$a_n=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1},\quad b_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束し，その和は 4

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は発散

◇ 教育・生物資源学部

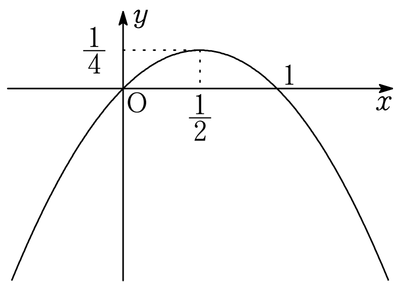
1　　医・工学部 **1** と同じ．

2　(1)　$\dfrac{1}{3}$

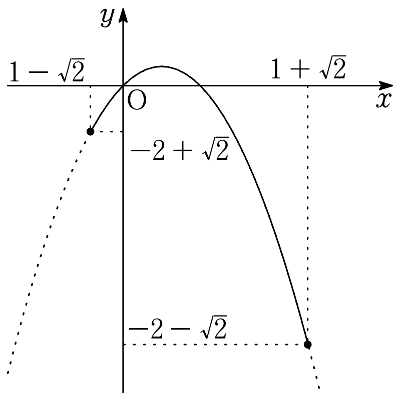
(2)　$\dfrac{1}{2}$

(3)　0

3　(1)　$y=-x^2+x$．グラフは右上図のようになる．



(2)　$-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}$．グラフは右下図のようになる．



(3)　最小値：-1　$(x,\ y)=(1 \pm \sqrt{2},\ -2 \mp \sqrt{2})$（複号同順）

4　(1)　$f'(x)=x\cos x$

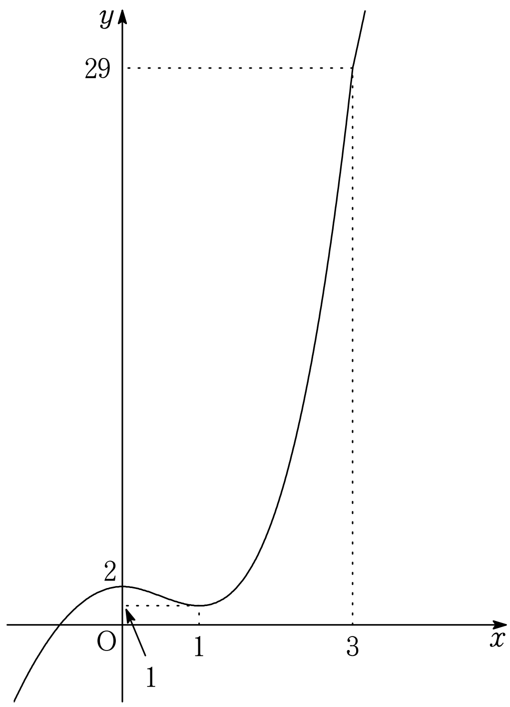
(2)　最大値：$1+\dfrac{\pi}{2}\ \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$，　最小値：$0\ (x=\pi)$

(3)　2π

5　(1)　増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	29	↗

グラフは右図のようになる．



極大値：$2\ (x=0)$，　極小値：$1\ (x=1)$

(2)
$$\begin{cases} k<1,\ 2<k \text{ のとき，} & 1 \text{ 個} \\ k=1,\ 2 \text{ のとき，} & 2 \text{ 個} \\ 1<k<2 \text{ のとき，} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

(3)　$\dfrac{-22+12\sqrt{6}}{27}$