◀2008 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

✏注：医学部は，**1**〜**4** 必答．工学部は，**3**, **5**〜**7** 必答．

1 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{2}$ とし，曲線 $y=f(x)$ 上に点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ をとる．ただし，$a>-1$ とする．P におけるこの曲線の接線を l とし，P を通って x 軸に垂直な直線を m とする．また m 上の点 $(a,0)$ を l に関して対称に移動した点を Q とし，2 点 P, Q を通る直線を n とおく．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 2 直線 l, m の間の角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，直線 l, n のそれぞれの傾きを θ の関数として表せ．

(2) 直線 l, n の方程式を a を用いて表せ．

(3) 直線 n が a の値によらないある定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

2 3 次方程式 $x^3-5x^2+6x-2=0$ の最小解を α，最大解を β とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) α, β の値を求めよ．

(2) 数列 $\{p_n\}, \{q_n\}$ は $p_1=0,\ q_1=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ を満たし，すべての自然数 n について

$$p_{n+1}=2p_n+q_n,\quad q_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n$$

を満たすとする．このときすべての自然数 n に対し次の等式が成立することを示せ．

$$p_n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-1},\quad q_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-2}$$

(3) すべての自然数 n に対し次の数 r_n は有理数であることを証明せよ．

$$r_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{k}$$

3 曲線 $C : y=\log\dfrac{x}{e}$ 上の点 $(e^2,\ 1)$ における接線を l とするとき，以下の問いに答えよ．ただし対数は自然対数とする．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 次の定積分 I_1, I_2 の値を求めよ．

$$I_1=\int_1^e \log x\,dx,\quad I_2=\int_1^e (\log x)^2\,dx$$

(3) 曲線 C，接線 l および x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

4 以下の問いに答えよ．ただし行列やベクトルの成分はすべて実数であるとする．

(1) 0 でない f に対し $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおく．このとき $|a|=|b|$ で $|s|<|t|$ となるような a, b が存在することを示せ．

(2) 任意の実数 x, y に対して不等式 $|x+y|\geqq|x|-|y|$ が成立することを示せ．次に $|g|\geqq 2$ を満たす g に対し $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ とおくとき，$|s|<|t|$ ならば $|u|>|v|$ であることを示せ．さらに $|h|\geqq 2$ を満たす h に対し $\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とおくとき，$|u|>|v|$ ならば $|s'|<|t'|$ であることを示せ．

(3)　$2n+1$ 個の実数 $f,\ g_1,\ h_1,\ \cdots,\ g_n,\ h_n$ において $f \neq 0$ であり，すべての $j=1,\ \cdots,\ n$ に対し $\left|g_j\right| \geqq 2,\ \left|h_j\right| \geqq 2$ であるとする．このとき積

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & g_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}$$

について $A \neq E$ を示せ．ただし，E は 2 次単位行列を表す．

5　座標平面において，点 $(0,\ \sqrt{5})$ を通り円 $C: x^2+y^2=1$ と第 1 象限の点で接する直線を l_1 とする．また，直線 l_1 と直交し円 C と第 4 象限の点で接する直線を l_2 とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　直線 l_1 の方程式を求めよ．

(2)　直線 l_2 の方程式を求めよ．

(3)　原点を O とし，2 直線 $l_1,\ l_2$ の交点を P とする．2 点 O, P を通る直線上に中心を持つ円 C' が，O を通りさらに l_1 と接しているとき，C' の方程式を求めよ．

6　3 次方程式 $x^3-5x^2+6x-2=0$ の最小解を α，最大解を β とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\alpha,\ \beta$ の値を求めよ．

(2)　数列 $\{p_n\},\ \{q_n\}$ は $p_1=0,\ q_1=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$ を満たし，すべての自然数 n について

$$p_{n+1}=2p_n+q_n,\quad q_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n$$

を満たすとする．このときすべての自然数 n に対し次の等式が成立することを示せ．

$$p_n=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-1},\quad q_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{n-2}$$

(3)　(2) の数列 $\{p_n\},\ \{q_n\}$ について，すべての自然数 n に対し p_n も q_n も $\sqrt{2}$ の有理数倍になることを示せ．

7　2 行 2 列の行列 A が $A^2=-A$ を満たしている．また行列 A で表される移動により，座標平面上のすべての点がある直線 l 上に移され，特に点 $(1,\ 1)$ は点 $(1,\ 2)$ に移される．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　直線 l の方程式を求めよ．次に行列 A を求めよ．

(2)　行列 A で表される移動によって，円 $x^2+y^2=1$ 上の点は直線 l のどのような部分に移されるか述べよ．

♠ 教育・生物資源学部

✎注：**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．

1　医・工学部 **5** と同じ．

2　以下の問いに答えよ．ただし，方程式の解はすべて複素数の範囲で考えるものとし，解を表す場合には $a+bi$ ($a,\ b$ は実数) の形で表すこと．

(1)　方程式 $x^3=1$ および $x^3=-1$ の解をそれぞれ求めよ．

(2)　k を実数の定数とする．方程式 $x^2+kx+1=0$ が異なる 2 つの解を持ち，一方の解が他方の解の 5 乗となるように，k の値を定めよ．またそのときの 2 つの解を求めよ．

3　a を定数とする．関数 $g(x)=x^3-ax$ に対し，関数 $f(x)$ が

$$f(x)=x^3-x^2\int_0^1\{f(t)-g(t)\}\,dt+1$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 \{f(t)-g(t)\}\,dt$ の値を a の式として表せ.

(2)　$f(x)$ が $x=0$ で極大になるような a の値の範囲を求めよ.

(3)　$a=0$ のとき曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

4　医・工学部 **6** と同じ.

5　座標平面上で原点 O を中心とする単位円周上を点 $\mathrm{A}(\cos t,\ \sin t)$ が移動し，x 軸上を点 $\mathrm{B}(1-\cos t,\ 0)$ が移動している．$0<t<\pi$ のとき三角形 OAB の面積 $S(t)$ について，以下の問いに答えよ.

(1)　$S(t),\ S'(t),\ S''(t)$ を求めよ.

(2)　$0<t<\pi$ における $S(t)$ の増減，極値，凹凸を調べグラフをかけ．また $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ．必要ならば，0 より大きく π より小さい範囲にある次の $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を用いてよい.

$$\cos\alpha=\frac{1}{3},\quad \cos\beta=\frac{1}{4},\quad \cos\gamma=\frac{1}{5}$$

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

- **1**　標準　II 図形と方程式・三角関数
- **2**　やや難　II 高次方程式・B 数列
- **3**　基本　III 微分法の応用・積分法の応用
- **4**　標準　II 式と証明・C 行列・１次変換
- **5**　標準　II 図形と方程式
- **6**　標準　II 高次方程式・B 数列
- **7**　標準　C 行列・１次変換

♣ 教育・生物資源学部

- **1**　標準　II 図形と方程式
- **2**　標準　II 複素数と方程式
- **3**　標準　II 微分積分
- **4**　標準　II 高次方程式・B 数列
- **5**　標準　III 微分法の応用

略解

◇ 医・工学部

1 (1) l の傾き： $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$，　n の傾き： $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2\theta\right)$

(2) $l: y=(a+1)x-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}$

$n: (a^2+2a)x-2(a+1)y+a^2+3a+1=0$

(3) 証明は省略．定点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

2 (1) $\alpha=2-\sqrt{2}$，　$\beta=2+\sqrt{2}$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3 (1) $y=\dfrac{1}{e^2}x$

(2) $I_1=1$，　$I_2=e-2$

(3) $\dfrac{2e(3-e)}{3}\pi$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) $y=-2x+\sqrt{5}$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $\left(x-\dfrac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\right)^2=(2-\sqrt{2})^2$

$\left(x+\dfrac{3(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}\right)^2=(2+\sqrt{2})^2$

6 (1) $\alpha=2-\sqrt{2}$，　$\beta=2+\sqrt{2}$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

7 (1) $l: y=2x$，　$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

(2) $y=2x$　$(-\sqrt{13}\leqq x\leqq\sqrt{13})$

◇ 教育・生物資源学部

1　医・工学部 **5** と同じ．

2 (1) $x^3=1$ の解：$x=1,\ -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$x^3=-1$ の解：$x=-1,\ \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(2)
$$\begin{cases} k=-1 \text{ のとき} \quad (\alpha,\ \alpha^5)=\left(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \dfrac{1}{2}\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ k=1 \text{ のとき} \quad (\alpha,\ \alpha^5)=\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$$
（複号同順）

3 (1) $\dfrac{3}{8}a+\dfrac{3}{4}$

(2) $a>-2$

(3) $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

4　医・工学部 **6** と同じ．

5 (1) $S(t)=\dfrac{1}{2}(1-\cos t)\sin t$　$\left(S(t)=\dfrac{1}{2}\sin t-\dfrac{1}{4}\sin 2t \text{ でも可}\right)$

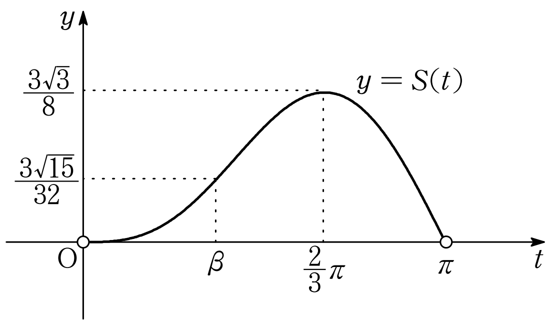
$S'(t)=\dfrac{1}{2}\cos t-\dfrac{1}{2}\cos 2t$

$S''(t)=-\dfrac{1}{2}\sin t+\sin 2t$

(2) 増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$S'(t)$	(0)	$+$		$+$	0	$-$	$(-)$
$S''(t)$	(0)	$+$	0	$-$		$-$	(0)
$S(t)$	(0)	⤴	$\dfrac{3\sqrt{15}}{32}$	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	(0)

グラフは下図の太実線部分で，白丸は含まない．



最大値：$\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　$\left(t=\dfrac{2}{3}\pi\right)$