◀2003 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

1　a, b を定数とし，$y=ax+b$ で与えられる直線を l とする．

(1)　直線 l 上に 2 点 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$ を取る．$\mathrm{A_1P}+\mathrm{A_2P}$ が最小になるような平面上の点 P についての条件を求めよ．

(2)　直線 l 上に 3 つの点 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$ を取る．この 3 つの点の x 座標をそれぞれ，a_1, a_2, a_3 とし，$a_1<a_2<a_3$ とする．$\mathrm{A_1Q}+\mathrm{A_2Q}+\mathrm{A_3Q}$ を最小にするような直線 l 上の点 Q の x 座標を求めよ．

(3)　直線 l 上に n 個の点 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\cdots$, A_n を取る．この n 個の点の x 座標をそれぞれ，a_1, a_2, $\cdots$, a_n とし，$a_1<a_2<\cdots<a_n$ とする．$\mathrm{A_1R}+\mathrm{A_2R}+\cdots+\mathrm{A}_n\mathrm{R}$ が最小になるような直線 l 上の点 R についての条件を求めよ．

2　α, β $(\alpha\neq\beta)$ が定数のとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_\alpha^\beta\{x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\}\,dx$ を計算せよ．

(2)　$\beta=\alpha+1$ のとき，$\displaystyle\int_\alpha^\beta\{x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta\}\,dx=\frac{1}{3}\alpha^3+2\alpha^2+t$ を満たす α の個数は，定数 t の値によってどのように変わるか調べよ．

3　直線 $l:x=-2$ と定円 $C:x^2+y^2=1$ の双方に外接する円 S と，直線 l に接し，円 C が内接する円 T を考える．

(1)　円 S の中心の軌跡の方程式を求め，概形を描け．また，円 T の中心の軌跡の方程式を求め，概形を描け．

(2)　円 C 上の点 $z(\theta)=(\cos\theta,\sin\theta)$ を，円 S と円 T が通っているとする．そのときの，円 S の中心 $\mathrm{S}(\theta)$ と円 T の中心 $\mathrm{T}(\theta)$ を求めよ．ただし，θ は $0<\theta<\pi$ とする．

(3)　上の 2 点 $\mathrm{S}(\theta)$ と $\mathrm{T}(\theta)$ の間の距離が θ $(0<\theta<\pi)$ によってどのように変わるかを調べよ．

4　行列 $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ に対し，$\Delta(X)=xw-yz$, $\widetilde{X}=\begin{pmatrix}w & -y\\ -z & x\end{pmatrix}$ とおく．また A, B は 2 行 2 列の行列で $A+B$ は逆行列を持つとする．以下で，E は 2 次の単位行列を表す．

(1)　$\widetilde{X}X=X\widetilde{X}=\Delta(X)E$ を示せ．また，$\widetilde{A+B}=\widetilde{A}+\widetilde{B}$ を示せ．

(2)　$\Delta(A+B)A(A+B)^{-1}B=\Delta(B)A+\Delta(A)B$ が成り立つことを示せ．

(3)　$A=\begin{pmatrix}-7 & -10\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & -a-1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ とおく．$A+B$ が逆行列を持つための a の条件を求めよ．さらにこのとき $C=(A(A+B)^{-1}B)^2$ が行列 E の実数倍になるような a の値を定め，また，そのときの行列 C を書け．

♠ 教育・生物資源学部

注：教育は，**1**〜**3** 必答・**6**, **7** から 1 題選択．生物資源は，**1**, **4**, **5** 必答・**6**, **7** から 1 題選択．

1　医・工学部 **1** と同じ．

2　3 点 A, B, C を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=a$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=b$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=c$, $\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$\mathrm{AB}^2=-a-c,\ \mathrm{BC}^2=-b-a,\ \mathrm{CA}^2=-c-b$ を示せ.

(2)　$\sin\theta$ を $a,\ b,\ c$ で表せ.

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径 R を $a,\ b,\ c$ で表せ.

3　絶対値が 1 で偏角が θ の複素数を z とし，n を正の整数とする.

(1)　z^n を θ で表す式を，三角関数の加法定理を用いて，帰納法で証明せよ.

(2)　$|1-z^2|$ を θ の関数で表せ.

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ を計算せよ.

4　以下の問いに答えよ.

(1)　正弦・余弦の加法定理を述べ，$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を導け.

(2)　次を満たす $x\ (0^\circ\leqq x<360^\circ)$ をすべて求めよ.

(i)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}$

(ii)　$\sin x+\sin 4x+\sin 7x=0$

5　n を正の整数とする．箱の中に，白い玉が n 個，赤い玉が 2 個入っている．A 君が最初，次に B 君と，交互に玉を取るとし，取った玉は箱に戻さないこととする．どちらかが最初に赤い玉を取るまでに，両者が取った白い玉の個数を X とする.

(1)　$X=4$ となる確率はいくつで，そのとき赤い玉を取るのは誰か．また，$X=5$ のときはどうなるか.

(2)　n が偶数のとき，A 君が最初に赤い玉を取る確率はいくつか．また，それが $\dfrac{5}{9}$ 以上になるのは，n がどんなときか.

6　医・工学部 **2** と同じ.

7　$f(x)=\log x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数である.

(1)　$y=f(x),\ y=-1,\ y=a\ (a>-1)$ のグラフと y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(2)　(1) の部分を y 軸の回りに回転させて得られる立体の体積を求めよ.

(3)　$y=-1\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{e}\right),\ y=f(x)\ \left(\dfrac{1}{e}\leqq x\right)$ のグラフを y 軸の回りに回転させてできる容器に水を毎秒 v の割合で注ぎ入れる．t 秒後の水面の高さを h ($t=0$ のとき $h=0$) として h を t の関数で表せ.

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

- **1** |標準| I　1 次関数
- **2** |標準| II　微分積分
- **3** |標準| III　微分法・ C　いろいろな曲線
- **4** |標準| C　行列

♣ 教育・生物資源学部

- **1** |標準| I　1 次関数
- **2** |基本| I　図形と計量・ B　ベクトル（平面）
- **3** |標準| B　複素数と複素数平面
- **4** |標準| II　三角関数
- **5** |標準| I　確率・ A　数列
- **6** |標準| II　微分積分
- **7** |基本| III　積分法の応用

略解

◇ 医・工学部

1 (1)　点 P が線分 $\mathrm{A_1A_2}$ 上（両端も含む）にあること

(2)　$x = a_2$

(3)　n が偶数のとき，　線分 $\mathrm{A}_{\frac{n}{2}}\mathrm{A}_{\frac{n}{2}+1}$ 上（両端を含む）にあること

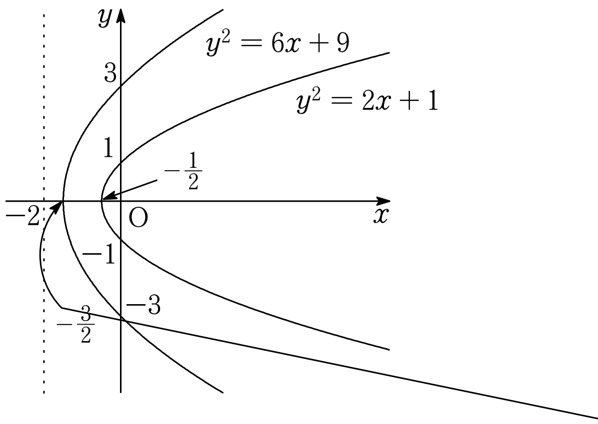
n が奇数のとき，　点 $\mathrm{A}_{\frac{n+1}{2}}$ と一致すること

2 (1)　$\dfrac{5}{6}\alpha^2 + \dfrac{1}{3}\alpha\beta + \dfrac{5}{6}\beta^2$

(2)
$$\begin{cases} t < \dfrac{5-8\sqrt{2}}{6},\ \dfrac{5+8\sqrt{2}}{6} < t \text{ のとき，} & 1 \text{ 個} \\ t = \dfrac{5\pm 8\sqrt{2}}{6} \text{ のとき，} & 2 \text{ 個} \\ \dfrac{5-8\sqrt{2}}{6} < t < \dfrac{5+8\sqrt{2}}{6} \text{ のとき，} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$

3 (1)　S の中心の軌跡は，放物線 $y^2 = 6x + 9$（グラフは右図）

T の中心の軌跡は，放物線 $y^2 = 2x + 1$（グラフは右図）



(2)　$\mathrm{S}(\theta)\left(\dfrac{3\cos\theta}{1-\cos\theta},\ \dfrac{3\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$

$\mathrm{T}(\theta)\left(-\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\ -\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\right)$

(3)　$0 < \theta < \alpha$ のとき減少，$\alpha < \theta < \pi$ のとき増加する

4 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$a \fallingdotseq \dfrac{17}{5}$

$a = 3$ のとき，$C = \dfrac{1}{2}E$

◇ 教育・生物資源学部

1　医・工学部 **1** と同じ.

2 (1) 証明は省略

(2) $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{ab+bc+ca+c^2}}$

(3) $R=\dfrac{\sqrt{-(a+b)(b+c)(c+a)}}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$

3 (1) 証明は省略

(2) $|1-z^2|=2|\sin\theta|$

(3)
$$\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta=\begin{cases}\dfrac{\sin n\theta\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} & (z\neq\pm1)\\ 0 & (z=\pm1)\end{cases}$$

4 (1) 証明は省略

(2) (i) $x=0^\circ,\ 60^\circ$

(ii) $x=0^\circ,\ 40^\circ,\ 45^\circ,\ 80^\circ,\ 90^\circ,\ 135^\circ,\ 160^\circ,\ 180^\circ,\ 200^\circ,\ 225^\circ,\ 270^\circ,\ 280^\circ,\ 315^\circ,\ 320^\circ$

5 (1)
$$\begin{cases}n\leqq 3\ \text{のとき,}\quad P(X=4)=0\\ n\geqq 4\ \text{のとき,}\quad P(X=4)=\dfrac{2(n-3)}{(n+2)(n+1)}\end{cases}$$
赤い玉をとるのは A 君

$$\begin{cases}n\leqq 4\ \text{のとき,}\quad P(X=5)=0\\ n\geqq 5\ \text{のとき,}\quad P(X=5)=\dfrac{2(n-4)}{(n+2)(n+1)}\end{cases}$$
赤い玉をとるのは B 君

(2) 赤い玉をとる確率は，$\dfrac{n+2}{2(n+1)}$，　$n\leqq 8$

6　医・工学部 **2** と同じ.

7 (1) $e^a-\dfrac{1}{e}$

(2) $\dfrac{\pi}{2}\left(e^{2a}-\dfrac{1}{e^2}\right)$

(3) $h=\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{2ve^2t}{\pi}+1\right)$