◀2001 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

1　a を実数の定数とし，関数 $f(x)$, $g(x)$ を以下のように定める．

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x<-2) \\ -x^2-2x & (-2 \leqq x<0) \\ x & (x \geqq 0) \end{cases} \quad , \quad g(x)=-2(a+1)x+a^2$$

(1)　どのような a に対しても，方程式 $-x^2-2x=g(x)$ の解は 1 つしか存在しないことを示し，その解を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=g(x)$ が異なる 3 つの解をもつような a の範囲を求めよ．

(3)　(2) の 3 つの解を α, β, γ とするとき，$\dfrac{a^6}{\alpha\beta\gamma}$ を最大にする a の値を求めよ．

2　複素数 z に対し，その共役複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1)　$z=x+yi$ (x, y は実数) は 0 でない複素数とする．$2z+i\overline{z}$ が z の実数倍であるとき，y を x を用いて表せ．

(2)　z_1 は実部が 1 で $2z_1+i\overline{z_1}$ が z_1 の実数倍となる複素数とする．このような各 z_1 に対し，漸化式

$$z_n=2z_{n-1}+i\overline{z}_{n-1} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

によって定義される数列 $\{z_n\}$ の一般項を z_1 を用いて表せ．

(3)　$w_1=3+i$ であるとき，漸化式

$$w_n=2w_{n-1}+i\overline{w}_{n-1} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

によって定義される数列 $\{w_n\}$ の一般項を求めよ．

3

(1)　無限等比級数 $1-\left(\dfrac{1}{2}x^2-x-1\right)+\left(\dfrac{1}{2}x^2-x-1\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}x^2-x-1\right)^3+\cdots$ が収束するような x の範囲を定めよ．また，そのときの和を求めよ．

(2)　(1) の級数の和を $f(x)$ とするとき，$\displaystyle\int f\left(3+\frac{1}{5}\cos\theta\right)\sin\theta\,d\theta$ を求めよ．

4　E は 2 次の単位行列，O は 2 次の零行列とする．

(1)　2 次の行列 B が $B^2=O$ を満たすとき，$A=E+B$ とすれば $A^n=E+nB$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(2)　$\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^{2001}$ を計算せよ．

(3)　p, q を正の整数とするとき，

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}^p+\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}^q=\begin{pmatrix} 38 & 18 \\ -72 & -34 \end{pmatrix}$$

を満たす p, q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

♠ 教育・生物資源学部

注：教育は，**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．生物資源は，**1**, **2**, **6** 必答・**3**, **5** から 1 題選択．

1

(1)　$2^{10}=1024>1000$ を利用して $\log_{10}2>0.3$ を示せ．

(2)　M, N を正の実数とするとき，不等式

$$\log_{10}(M+N) \geqq \frac{1}{2}(\log_{10}M+\log_{10}N)+\log_{10}2$$

が成り立つことを示せ．

(3)　(1), (2) を利用して $\log_{10}13>1.1$ を示せ．

2

医・工学部 **1** と同じ．

3

複素数 z に対し，その共役複素数を $\overline{z}$ で表す．

(1)　0 でない複素数 $z=x+yi$ (x, y は実数) が $z^2+\overline{z}^2=0$ を満たすとき，y を x を用いて表せ．

(2)　$2z+i\overline{z}$ が z の実数倍となるとき，z は $z^2+\overline{z}^2=0$ を満たすことを示せ．

(3)　z_1 は ${z_1}^2+{\overline{z}_1}^2=0$ を満たし，実部が 1 である複素数とする．このような各 z_1 に対し，漸化式

$$z_n=2z_{n-1}+i\overline{z}_{n-1}\ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

によって定義される数列 $\{z_n\}$ の一般項を z_1 を用いて表せ．

4

a を実数の定数とし，$f(x)=x^3+3(a-2)x^2-(a^2-4)x+a^3-2a^2-1$ とおく．

(1)　関数 $f(x)$ が極値をもたないような a の範囲を求めよ．

(2)　整式 x^3-2x^2+2x-1 と整式 $f(x)$ とが定数でない共通因数をもつときの a の値を求めよ．またこのときの各 a に対する $f(x)$ を因数分解せよ．

(3)　(1) で求めた範囲の a に対し，$f(x)$ はどのような実数 p, q に対しても $(x-p)(x-q)$ で割り切れないことを示せ．

5

(1)　無限等比級数 $1-(x^2+x-3)+(x^2+x-3)^2-(x^2+x-3)^3+\cdots$ が収束するような x の範囲を定めよ．また，そのときの和を求めよ．

(2)　(1) の級数の和を $f(x)$ とするとき，$\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

6

m を実数の定数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　直線 $y=mx-2m-1$ は，m がどのような値をとっても定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

(2)　r を $0<r<4$ の範囲にある実数とする．x と y に関する連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=r \\ y=mx-2m-1 \end{cases}$$

の解がすべて整数となるような r と m の組 (r, m) とそのときの解をすべて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

1 |標準| [II] 微分積分

2 |標準| [A] 数列・[B] 複素数と複素数平面

3 |標準| [III] 数列の極限・積分法

4 |標準| [C] 行列

♣ 教育・生物資源学部

1 |標準| [II] 対数関数

2 |標準| [II] 微分積分

3 |標準| [B] 複素数と複素数平面

4 |標準| [II] 高次方程式・微分積分

5 |基本| [III] 数列の極限・積分法

6 |標準| [II] 図形と方程式

略解

◇ 医・工学部

1 (1)　証明は省略. $x=a$

(2)　$-\frac{3}{2}<a<-1$

(3)　$a=-\frac{5+\sqrt{7}}{6}$

2 (1)　$y=\pm x$

(2)　$z_1=1+i$ のとき, $z_n=3^{n-1}z_1$

$z_1=1-i$ のとき, $z_n=z_1$

(3)　$w_n=2\cdot 3^{n-1}+1+(2\cdot 3^{n-1}-1)i$

3 (1)　$1-\sqrt{5}<x<0,\ 2<x<1+\sqrt{5}$, 和 : $\frac{2}{x^2-2x}$

(2)　$\int f\left(3+\frac{1}{5}\cos\theta\right)\sin\theta\,d\theta=5\log\frac{15+\cos\theta}{5+\cos\theta}+C$　（C は積分定数）

4 (1)　証明は省略

(2)　$\begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}^{2001}=\begin{pmatrix} 12007 & -18009 \\ 8004 & -12005 \end{pmatrix}$

(3)　$(p,\ q)=(6,\ 2),\ (3,\ 4)$

◇ 教育・生物資源学部

1 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

2　医・工学部 **1** と同じ.

3 (1)　$y=\pm x$

(2)　証明は省略

(3)　$z_1=1+i$ のとき, $z_n=3^{n-1}z_1$

$z_1=1-i$ のとき, $z_n=z_1$

4 (1)　$1\leqq a\leqq 2$

(2)　$a=1$ のとき, $f(x)=(x-2)(x^2-x+1)$

$a=2$ のとき, $f(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

(3)　証明は省略

5 (1)　$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<x<-2,\ 1<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, 和 : $\frac{1}{x^2+x-2}$

(2)　$\int f(x)\,dx=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$　（C は積分定数）

6 (1)　証明は省略. 定点 $(2,\ -1)$

(2)　$(r,\ m)=(1,\ 0)$ のとき,　$(x,\ y)=(0,\ -1)$

$(r,\ m)=(\sqrt{2},\ 0)$ のとき,　$(x,\ y)=(\pm 1,\ -1)$

$(r,\ m)=(1,\ -1)$ のとき,　$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$