◀2000 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

1　座標平面上で不等式

$$2(\log_3 x-1)\leqq \log_3 y-1\leqq \log_3\left(\frac{x}{3}\right)+\log_3(2-x)$$

を満たす点 $(x,\,y)$ 全体のつくる領域を D とする．

(1)　D を座標平面上に図示せよ．

(2)　$a<2$ の範囲にある定数 a に対し，$y-ax$ の D 上での最大値 $M(a)$ を求めよ．

2　$p>0$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$x>0$ のとき，$\log x<\dfrac{2}{p}x^{\frac{p}{2}}$ を示せ．また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^p}\log x=0$ を示せ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_1^k\frac{1}{x^{p+1}}\log x\,dx$ を求めよ．

3　ふたつの数列 $\{a_n\},\,\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{7}{5}a_n-\frac{8}{5}b_n\quad(n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots),$$

$$b_1=1,\quad b_{n+1}=\frac{4}{5}a_n-\frac{1}{5}b_n\quad(n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$$

により定める．

(1)　すべての n について $a_{n+1}+\beta b_{n+1}=\alpha(a_n+\beta b_n)$ が成立するような複素数の定数 $\alpha,\,\beta$ を求めよ．

(2)　(1) の β について，$|a_n+\beta b_n|=1$ がすべての n に対し成り立つことを示せ．

(3)　すべての n に対し，$|a_n|\leqq\sqrt{2},\ |b_n|\leqq 1$ となることを示せ．

4　2 次正方行列 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&1\\-1&0\end{pmatrix}$ をとり，実数 $s,\,t$ に対し，$sE+tA$ の形の行列を考える．

(1)　$(s,\,t)\neq(0,\,0)$ のとき，$sE+tA$ が逆行列を持つことを示せ．またこのとき $(sE+tA)^{-1}=uE+vA$ となる $u,\,v$ を $s,\,t$ を用いて表せ．

(2)　次の 2 条件をともに満たすような組 $(s,\,t)\neq(0,\,0)$ をすべて求めよ．

（ i ）　$(sE+tA)^{-1}=sE+tA^{-1}$ が成立する．

（ii）　$s=a+b\sqrt{2},\ t=c+d\sqrt{2}$ $(a,\,b,\,c,\,d$ は整数$)$ の形に表される．

♠ 教育・生物資源学部

注：教育は，**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．生物資源は，**1**, **2**, **6** 必答・**3**, **5** から 1 題選択．

1　医・工学部 **1** と同じ．

2　座標平面上に 3 点 A(0, 2), B(4, 5), C(6, 2) を取り，線分 AB，線分 BC および放物線 $y=x^2-6x+2$ で囲まれた図形を F とする．

(1)　F の面積を求めよ．

(2)　F の境界上に y 座標の等しい 2 点 P, Q をとるとき，三角形 BPQ の面積の最大値を求めよ．

3　辺 OA の長さが l，辺 OB の長さが $\sqrt{3}l$ で，$\angle\mathrm{O}=150^\circ$ の三角形 OAB において，辺 AB を $s:(1-s)$ に内分する点を P とし，$t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．ただし，$0 \leqq s<t \leqq 1$ とする．$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1)　t を s を用いて表せ．

(2)　s の最大値を求めよ．

(3)　$\angle\mathrm{AOP}=30^\circ$ のとき，s の値を求めよ．

4　座標平面上で 3 点 $\mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta)$, $\mathrm{C}(1, 0)$ を考える．ただし，$0^\circ<\alpha<\beta<360^\circ$ とする．三角形 ABC の 3 辺 BC, CA, AB の長さを順に a, b, c とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$c^2=4-4\cos^2\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$ が成立することを示せ．

(2)　$a^2+b^2+c^2=8-8\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$ が成立することを示せ．

(3)　$a^2+b^2+c^2=8$ ならば三角形 ABC は直角三角形であることを示せ．

5　曲線 $C: y=ae^{-ax}$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(t, ae^{-at})$, $\mathrm{Q}(u, ae^{-au})$ をとる．ただし，a は正の定数で $u>t>0$ とする．P, Q から x 軸に垂線 PG, QH を引いて，2 本の線分 PG, QH と x 軸および曲線 C で囲まれる領域の面積を A とおき，線分 PG, x 軸，y 軸，および曲線 C で囲まれる領域の面積を B とおく．

(1)　A, B を t, u を用いて表せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{B}{A}=1$ となるときの t を求めよ．

(3)　定数 $m>1$ があって関係式 $u=mt$ が成立しているとき，A を最大とする t を求めよ．

6　医・工学部 **2** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

1	基本	II	図形と方程式・指数関数・対数関数
2	標準	III	関数の極限・微分法の応用・積分法
3	標準	A, B	数列・複素数と複素数平面
4	標準	A, C	整数問題・行列

♣ 教育・生物資源学部

1	基本	II	図形と方程式・指数関数・対数関数
2	基本	II	微分積分
3	標準	B	ベクトル（平面）
4	標準	II	三角関数
5	標準	III	関数の極限・積分法
6	標準	III	関数の極限・微分法の応用・積分法

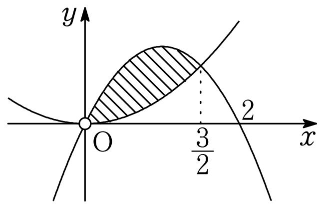
略解

◇ 医・工学部

1 (1) $\begin{cases} y \geqq \dfrac{1}{3}x^2 \\ y \leqq -x^2+2x \end{cases}$ $(0<x<2,\ y>0)$

求める領域は，右図の斜線部分で境界線上の点を含む．

ただし，原点は除く．



(2) $M(a)=\dfrac{(a-2)^2}{4}$

2 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_1^k \frac{1}{x^{p+1}}\log x\,dx=\frac{1}{p^2}$

3 (1) $\alpha=\dfrac{3\pm 4i}{5}$, $\beta=-1\pm i$ （複号同順）

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) 証明は省略，$u=\dfrac{s+\sqrt{2}t}{s^2+\sqrt{2}st+t^2}$, $v=-\dfrac{t}{s^2+\sqrt{2}st+t^2}$

(2) $(s,\,t)=(\pm1,\,0),\,(0,\,\pm1),\,(\pm\sqrt{2},\,\mp1),\,(\pm1,\,\mp\sqrt{2})$ （複号同順）

◇ 教育・生物資源学部

1 医・工学部 **1** と同じ．

2 (1) 45

(2) 16

3 (1) $t=\dfrac{5s-2}{14s-5}$

(2) $\dfrac{1}{3}$

(3) $s=\dfrac{1}{4}$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) $A=e^{-at}-e^{-au}$, $B=1-e^{-at}$

(2) $t=\dfrac{\log 2}{a}$

(3) $t=\dfrac{\log m}{a(m-1)}$

6 医・工学部 **2** と同じ．