◀1997 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

✑注：**1**, **2** 必答・**3** (A), **3** (B), **3** (C) から 1 題, **4** (A), **4** (B), **4** (C) から 1 題選択.

1　a, b, c は条件 $a \leqq b+c$ を満たす正の整数とする．このとき，0 以上の整数 m, n で条件 $m+n=a$, $m \leqq b$, $n \leqq c$ を満たす組 (m, n) の総数を l とする．次の問いに答えよ．

(1)　b が $\{a, b, c, b+c-a\}$ の中の最小数であるとき l を求めよ．

(2)　$b+c-a$ が $\{a, b, c, b+c-a\}$ の中の最小数であるとき l を求めよ．

2　関数 $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=e^{-x}\sin x$, $h(x)=e^{-x}\cos x$ について，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲でかけ．

(2)　不定積分 $\displaystyle\int (g(x)-h(x))\,dx$ と $\displaystyle\int (g(x)+h(x))\,dx$ を求め，さらに $\displaystyle\int g(x)\,dx$ を求めよ．

(3)　n を正の整数とし，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた領域の $0 \leqq x \leqq n\pi$ の範囲にある部分の面積を a_n とするとき，a_n を求めよ．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

3 (A) 空間内で 4 点 O, A, B, C を頂点とし，一辺の長さが r の正四面体を考える．次にベクトルの等式 $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ で定まる点 G をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ は 3 点 O, B, C で定まる平面に垂直であることを示せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の長さを r を用いて表せ．

(3)　3 つの三角形 OAB, OBC, OCA の重心をそれぞれ，P, Q, R とするとき，三角形 PQR の面積を r を用いて表せ．

(4)　正四面体 OABC と四面体 GPQR の体積の比を求めよ．

3 (B) 次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1)　等式 $1+2i=\dfrac{a(b-i)}{b+i}$ を満たす実数 a, b を求めよ．

(2)　c がすべての実数を動くとき，等式 $z=\dfrac{-3+3(1+c)i}{c+i}$ で定まる複素数 $z=x+yi$ は複素数平面上でどのような図形を描くか図示せよ．

(3)　問 (2) の z の絶対値 $|z|$ の最大値と最小値を求めよ．

3 (C) 5 個の数字 1, 3, 9, 27, 81 を 1 つずつ書いたカードを各 6 枚準備して箱に入れる．

(1)　箱からでたらめに 3 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出されたカードの数がすべて異なっている確率を求めよ．

(2)　箱からでたらめに 2 枚同時に取り出すとき，取り出される 2 枚のカードの数の和の期待値を求めよ．

4 (A) p, q を実数とし，2 次の正方行列 A, B を

$$A=\begin{pmatrix} 2p-q & -2p+2q \\ p-q & -p+2q \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　B の逆行列 B^{-1} を求めよ．さらに，$B^{-1}AB$ を計算せよ．

(2)　A が逆行列をもち $A,\ A^2,\ A^3,\ \cdots\cdots,\ A^n,\ \cdots\cdots$ のうち異なるものが有限個しかないような $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ．

4 (B) 座標平面上のだ円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の $x>0,\ y>0$ の部分を C で表す．曲線 C 上に点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ をとり，点 P での接線と 2 直線 $y=1$ および $x=2$ との交点をそれぞれ Q, R とする．点 $(2,\ 1)$ を A で表し，三角形 AQR の面積を S とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x_1+2y_1=k$ とおくとき，積 x_1y_1 を k を用いて表せ．

(2)　S を k を用いて表せ．

(3)　点 P が曲線 C 上を動くとき，S の最大値を求めよ．

4 (C) 連続的な値をとる確率変数 A の確率密度関数 $f(t)$ が

$$f(t)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}(t^2-1) & (|t|\leqq 1)\\ 0 & (|t|>1)\end{cases}$$

で与えられているとする．この確率変数 A の値に対して曲線 $y=(1+A^2)x^2+2Ax+3$ を考え，$x=3$ における接線と y 軸との交点の y 座標を c とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　c を A を用いて表せ．

(2)　$-18\leqq c\leqq -9$ となる確率を求めよ．

♠ 教育・生物資源学部

✎注：**1**〜**3** 必答・**4** (A), **4** (B), **4** (C), **4** (D) から 1 題選択．

1　医・工学部 **1** と同じ．

2　座標平面上で連立不等式 $x^2+2x+y^2\geqq 3,\ |x|+2|y|\leqq 10$ の表す領域を D とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　点 $(x,\ y)$ が D 上を動くとき，x^2+y^2-2y の最大値と最小値およびそのときの $(x,\ y)$ を求めよ．

3　$p(x)$ は 1 次関数で条件 $\displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx=0,\ \int_0^1 p(x)^2\,dx=1,\ p(0)>0$ を満たすものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$p(x)$ を求めよ．

(2)　任意の 1 次関数 $f(x)$ は定数 $a,\ b$ を用いて $f(x)=ap(x)+b$ と表せることを示せ．

(3)　1 次関数 $f(x)=ap(x)+b$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,dx=1$ を満たすとき，$f(1)$ の取り得る値の範囲を求めよ．

4 (A) r を $0<r<\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ を満たす定数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　放物線 $y=4-x^2$ は円 $x^2+(y-2)^2=r^2$ の外部にあることを示せ．

(2)　不等式 $y\leqq 4-x^2,\ x^2+(y-2)^2\geqq r^2,\ -r\leqq x\leqq r,\ y\geqq 0$ をすべて満たす座標平面上の点 $(x,\ y)$ が決める領域を D とする．D において x 座標が t であるような部分の全長を $f(t)$ とおく．$f(t)$ を t を用いた式で表せ．

(3)　t が $-r\leqq t\leqq r$ の範囲を動くとき，$f(t)$ の最小値を求めよ．

4 (B) 医・工学部 **3**(A)(1)〜(3) と同じ.

4 (C) 複素数 $\alpha = a + bi$ をとり，複素数平面上で α の表す点を中心とし原点 O を通る円を C とする．ただし，$a, b > \frac{\sqrt{2}}{2}$ とし，i は虚数単位を表す．次に原点と異なる点 P を取り，原点からこの点を通る半直線上に点 Q を $\mathrm{OP} \cdot \mathrm{OQ} = 1$ を満たすようにとる．このとき，次の問いに答えよ.

(1)　2 点 P, Q を表す複素数をそれぞれ z, w とするとき，w を z を用いて表せ.

(2)　点 P が C 上の原点と異なるすべての点を動くとき，点 Q の軌跡を図示せよ.

4 (D) 4 個の数字 1, 3, 9, 27 を 1 つずつ書いたカードを各 6 枚準備して箱に入れる.

(1)　箱からでたらめに 3 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出されたカードの数がすべて異なっている確率を求めよ.

(2)　箱からでたらめに 2 枚同時に取り出すとき，取り出される 2 枚のカードの数の和の期待値を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

1		標準	A	整数問題
2		標準	III	数列の極限・微分法の応用（グラフ図示）・積分法の応用（面積）
3	(A)	標準	B	ベクトル（空間）
3	(B)	標準	B	複素数と複素数平面
3	(C)	標準	I	確率
4	(A)	標準	C	行列（n 乗の計算）
4	(B)	標準	C	いろいろな曲線（楕円）
4	(C)	標準	C	正規分布

♣ 教育・生物資源学部

1		標準	A	整数問題
2		標準	II	図形と方程式
3		標準	II	微分積分
4	(A)	標準	III	微分法の応用
4	(B)	標準	B	ベクトル（空間）
4	(C)	標準	B	複素数と複素数平面
4	(D)	基本	I	確率

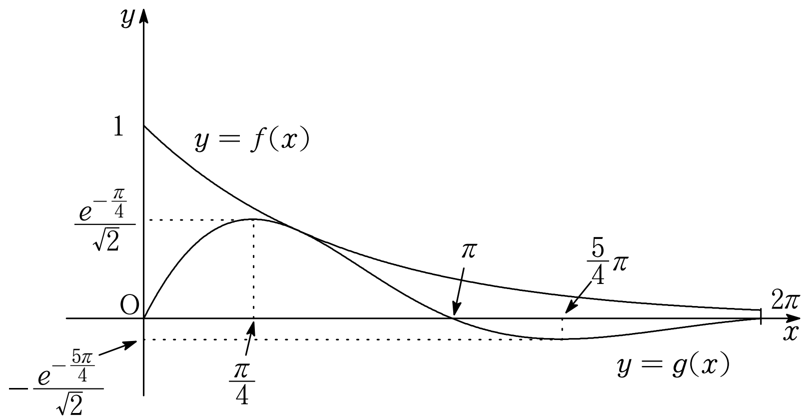
略解

◇ 医・工学部

1　(1)　$l = b + 1$

(2)　$l = -a + b + c + 1$

2　(1)



(2)　$\displaystyle\int (g(x) - h(x))\,dx = -e^{-x}\sin x + C$（$C$ は積分定数）

$\displaystyle\int (g(x) + h(x))\,dx = -e^{-x}\cos x + C$（$C$ は積分定数）

$\displaystyle\int g(x)\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$（$C$ は積分定数）

(3)　$a_n = \dfrac{(-1)^n}{2}e^{-n\pi} - e^{-n\pi} + \dfrac{1}{2}$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

3　(A)　(1)　証明は省略

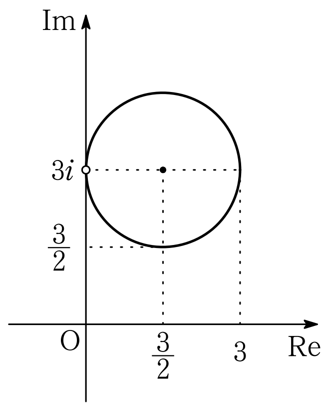
(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right| = \dfrac{\sqrt{6}}{4}r$

(3)　$\dfrac{\sqrt{3}}{36}r^2$

(4)　（正四面体 OABC の体積）:（四面体 GPQR の体積）$= 108 : 1$

3　(B)　(1)　$a = \pm\sqrt{5},\ b = \dfrac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$（複号同順）

(2)　下図の太実線部分で点 $3i$ を除く．



(3)　最大値は $\dfrac{3(\sqrt{5}+1)}{2}$，最小値は $\dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$

3　(C)　(1)　$\dfrac{108}{203}$

(2)　$\dfrac{242}{5}$

4　(A)　(1)　$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ B^{-1}AB=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & q\end{pmatrix}$

(2)　$(p,\ q)=(1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)$

4　(B)　(1)　$x_1y_1=\dfrac{k^2}{4}-1$

(2)　$S=\dfrac{2k-4}{k+2}$

(3)　$6-4\sqrt{2}$

4　(C)　(1)　$c=-9A^2-6$

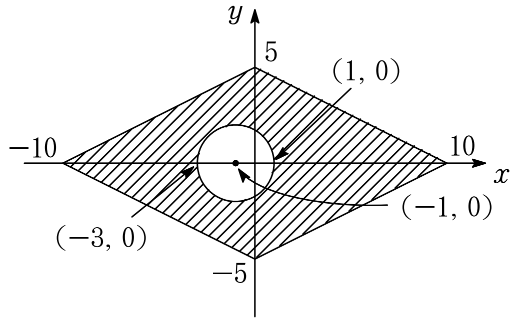
(2)　$1-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

◇ 教育・生物資源学部

1　医・工学部 **1** と同じ.

2　(1)　$\begin{cases}(x+1)^2+y^2 \geqq 4\\ |x|+2|y| \leqq 10\end{cases}$

領域 D は下図の斜線部分で，境界線上の点を含む.



(2)　$\begin{cases}(x,\ y)=(-10,\ 0),\ (10,\ 0) \text{ のとき　最大値 } 100\\ (x,\ y)=(-1+\sqrt{2},\ \sqrt{2}) \text{ のとき　最小値 } 5-4\sqrt{2}\end{cases}$

3　(1)　$p(x)=-2\sqrt{3}x+\sqrt{3}$

(2)　証明は省略

(3)　$-2 \leqq f(1) \leqq 2$

4　(A)　(1)　証明は省略

(2)　$f(t)=(4-t^2)-2\sqrt{r^2-t^2}$

(3)　$\begin{cases}0<r<1 \text{ のとき　} 4-2r\\ 1 \leqq r<\dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき　} 3-r^2\end{cases}$

4　(B)　(1)　証明は省略

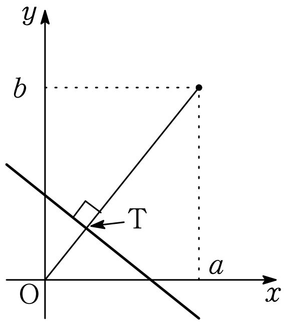
(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}r$

(3)　$\dfrac{\sqrt{3}}{36}r^2$

(4)　(正四面体 OABC の体積)：(四面体 GPQR の体積) $=108:1$

4　(C)　(1)　$w=\dfrac{z}{|z|^2}$

(2)　点 T$\left(\dfrac{a}{2(a^2+b^2)},\ \dfrac{b}{2(a^2+b^2)}\right)$ を通り直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ に垂直な直線 $ax+by=\dfrac{1}{2}$



4　(D)　(1)　$\dfrac{108}{253}$

(2)　20