◀1996 年　三重大学（前期）▶

♠ 医学部

1　行列 $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする．平面上の点 P の f による像を Q と表すとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 P が原点を中心とする半径 1 の円周（単位円周）上を動くとき，線分 PQ の長さはどのように変わるか．

(2)　点 P が単位円周上を，点 $(1,\,0)$ を出発して正の向きに一周するとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はどの点を出発し，どんな円周上をどの向きに何周するか．

(3)　点 P が単位円周上を動くとき，点 Q の軌跡はどのような図形を描くか．

2　$0<a<b$ として，関数 $y=a^2-x^2$ のグラフ G および 2 直線 $x=\pm b$ と，$y \geqq 0$ の領域で交わる直線 l を考える．図形 $F_1,\,F_2,\,F_3$ を次のように選ぶ．

F_1：直線 $x=-b$，直線 l, x 軸，曲線 G で囲まれた領域．
F_2：直線 l と曲線 G だけで囲まれた領域．
F_3：直線 $x=b$，直線 l, x 軸，曲線 G で囲まれた領域．

(1)　F_2 の面積が，F_1 と F_3 の面積の和に等しいとき，直線 l はある定点を通ることを示せ．

(2)　上の条件下で，$F_1,\,F_2,\,F_3$ の面積の和の最大値を求めよ．

3　平面上の曲線 $C: x=a(t+\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ を考えるとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として求め，曲線 C の概形を描け．

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3)　$t=\alpha\ (0<\alpha<\pi)$ に対応する曲線上の点を P とする．曲線 C 上の点 P における接線が x 軸の正の方向となす角を θ とするとき，α を θ で表せ．

(4)　原点から点 P までの曲線 C の長さを a と θ で表せ．

4

(1)　3 点 $\mathrm{O}(0,\,0)$, $\mathrm{A}(a_1,\,a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\,b_2)$ を頂点とする三角形 OAB の面積は $\dfrac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right|$ で与えられることを示せ．

(2)　公平なサイコロを 4 回投げて，それぞれの目の値を順に $X_1,\,X_2,\,X_3,\,X_4$ とする．$\mathrm{A}(X_1,\,X_2)$, $\mathrm{B}(X_3,\,X_4)$ とおくとき，三角形 OAB の面積が整数とならない確率はいくらか．

♠ 医学部以外

注：工学部 **1**〜**4**，生物資源学部 **2**〜**5**，教育学部 **5**, **6** 必答・(**7**, **8**) か (**9**, **10**) から 1 組選択．

1　医学部 **1** と同じ．

2　一般項 a_n が $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\ (n=1,\,2,\,\cdots\cdots)$ と表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_{n+2} を a_n, a_{n+1} で表せ.

(2)　数列 $\{a_n\}$ の第 1 項から第 n 項までの和を S_n と表すとき，S_{n+1} を a_n の一次式で表せ.

3　平面上の曲線 $C: x=a(t+\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$ を考えるとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする.

(1)　$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として求め，曲線 C の概形を描け.

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

4　速さ v で流れている幅 L の川がある．川岸の船着き場 O と対岸の船着き場 P との間に定期航路がある．向こう岸 P にいる船にエンジンの故障が起き，船は川の流れと同じ速さ v でしか進めなくなってしまった．船首を常に O に向けて航行するとして，こちら岸に戻れるかどうか，考えてみよう.
O から下流に向かって x 軸を，O から P に向かって y 軸をとるとすると，船が描く曲線は次の方程式にしたがっていることが分かっている.

$$\frac{dx}{dt}=v-v\cos\theta,\ \frac{dy}{dt}=-v\sin\theta$$

ただし，θ は O から船の位置 (x, y) へのベクトルが x 軸の正の方向となす角である.

(1)　時間 t を消去して，$\dfrac{dy}{dx}$ を x, y の関数として求めよ.

(2)　$x=wy$ と置き，x を消去して，$\dfrac{dy}{dw}$ を w, y の関数として求めよ.

(3)　$u=w+\sqrt{1+w^2}$ と置き，w を消去して，$\dfrac{dy}{du}$ を u, y の関数として求めよ.

(4)　船はこちら岸に戻れるだろうか．戻れるのであれば，船着き場 O からどれだけ下流に着くことになるだろうか.

5　行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする．平面上の点 P の f による像を Q と表すとき，次の問いに答えよ.

(1)　点 P が原点を中心とする半径 1 の円周（単位円周）上を動くとき，線分 PQ の長さはどう変わるか.

(2)　点 P が単位円周上を，点 $(1, 0)$ を出発して正の向きに一周するとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はどの点を出発し，どんな円周上をどの向きに何周するか.

(3)　点 P が単位円周上を動くとき，点 Q の軌跡はどのような図形を描くか.

6　時刻 $t=0$ のとき中心が原点にある半径 1 の球面が，ベクトル $(1, 2, 3)$ の方向に毎秒 1 の速さで移動していく.

(1)　平面 $3x+2y+z=20$ に，この球面が到達する時刻 t_0 を求めよ.

(2)　上の平面に最初に到達したときの接点を P，最後に離れるときの接点を Q とするとき，P と Q を通る直線の方程式を求めよ.

7　$0<a<b$ として，関数 $y=a^2-x^2$ のグラフ G および 2 直線 $x=\pm b$ と，$y \geqq 0$ の領域で交わる直線 l を考える．図形 F_1, F_2, F_3 を次のように選ぶ.

F_1：直線 $x=-b$，直線 l, x 軸，曲線 G で囲まれた領域.
F_2：直線 l と曲線 G だけで囲まれた領域.
F_3：直線 $x=b$，直線 l, x 軸，曲線 G で囲まれた領域.

（1）　F_2 の面積が，F_1 と F_3 の面積の和に等しいとき，直線 l はある定点を通ることを示せ．

（2）　上の条件下で，F_1, F_2, F_3 の面積の和が最大になるときの直線 l を求めよ．

8　正の整数 n に対して，次の問いに答えよ．

（1）　$(2+\sqrt{3})^n$ を $a+b\sqrt{3}$ (a, b は正の整数）と表すとき，$(2-\sqrt{3})^n$ が $a-b\sqrt{3}$ と表されることを示せ．

（2）　またこのとき，a^2-1 が 3 の倍数であることを示せ．

（3）　$(2+\sqrt{3})^n$ は，ある正の整数 A に対して $\sqrt{A}+\sqrt{A+1}$ の形をしていることを示せ．

9　実数 a に対して次の問いに答えよ．

（1）　関数 $y=a+\log x$ のグラフ G_a の接線のうち，原点を通る直線 l_a の方程式を求めよ．

（2）　曲線 G_a ，直線 l_a と x 軸で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ．

10　$y=\dfrac{\log x}{x}$ で表される関数に対して，次の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数 $\log_e x$ のことである．

（1）　この関数のグラフ G の概形を描け．

（2）　曲線 G, x 軸，直線 $x=e^n$ (n は正の整数）で囲まれた領域 F の面積を求めよ．

（3）　領域 F を x 軸のまわりに回転した立体の体積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医学部

1　標準　代幾　行列と１次変換

2　標準　基解　微分積分（面積）

3　標準　微積　微分法の応用（凹凸）・積分法の応用（面積・弧長）

4　標準　I　確統　三角比・確率

♣ 医学部以外

1　標準　代幾　行列

2　標準　基解　数列（漸化式）

3　標準　微積　微分法の応用（凹凸）・積分法の応用（面積・弧長）

4　標準　微積　微分方程式

5　標準　代幾　行列と１次変換

6　標準　代幾　ベクトル（平面の方程式）

7　標準　基解　微分積分（面積）

8　標準　基解　数列（数学的帰納法）

9　基本　微積　微分法の応用（接線）・積分法の応用（面積）

10　標準　微積　微分法の応用（凹凸）・積分法の応用（面積・体積）

略解

◇ 医学部

1 (1) $\dfrac{1}{3}$

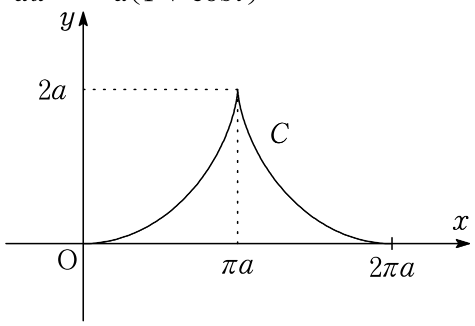
(2) 点 $\left(0,\ -\dfrac{1}{3}\right)$ を出発して，原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円周上を負の向きに一周する

(3) $x^2+y^2=\dfrac{10}{9}$

2 (1) 証明は省略

(2) $\dfrac{8a^3(a^4-6ab^3+9b^4)^{\frac{3}{2}}}{81b^6}$

3 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{a(1+\cos t)^2}$



(2) πa^2

(3) $\alpha=2\theta$

(4) $4a\sin\theta$

4 (1) 証明は省略

(2) $\dfrac{3}{8}$

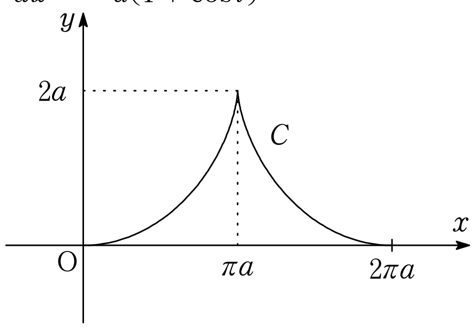
◇ 医学部以外

1 医学部 **1** と同じ．

2 (1) $a_{n+2}=5a_{n+1}-5a_n$

(2) $S_{n+1}=5a_n+1$

3 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{a(1+\cos t)^2}$



(2) πa^2

4 （1） $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x-\sqrt{x^2+y^2}}$

（2） $\dfrac{dy}{dw}=-\dfrac{y}{\sqrt{1+w^2}}$

（3） $\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{y}{u}$

（4） 船は戻れない

5 （1） $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（2） 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ を出発して，原点を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の円周上を正の向きに一周する

（3） $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$

6 （1） $t_0=\dfrac{10\sqrt{14}-7}{5}$

（2） $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-6}{-4}$

7 （1） 証明は省略

（2） $y=\pm\dfrac{2a^3}{3b^2}x+\dfrac{2a^3}{3b}$

8 （1） 証明は省略

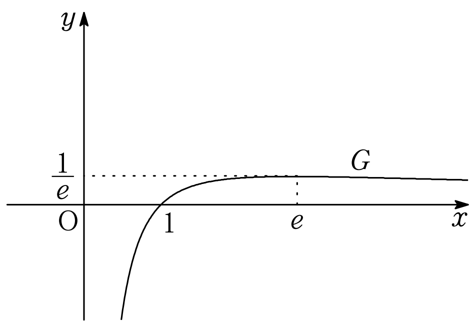
（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

9 （1） $y=e^{a-1}x$

（2） $S(a)=\dfrac{e-2}{2e^a}$

10 （1）



（2） $\dfrac{n^2}{2}$

（3） $\left(2-\dfrac{n^2+2n+2}{e^n}\right)\pi$