◀1995 年　三重大学（前期）▶

♠ 医学部

1

(1)　平面上の 2 点 (a, b), (c, d) に対して，多項式 $(aX+b)(cX+d)$ を X^2-X+1 で割った余りが $mX+n$ であるとき，m, n を a, b, c, d で表せ．なお，点 (m, n) を $(a, b) \odot (c, d)$ と表すことにする．

(2)　平面上の点 (a, b) を考える．任意の点 (m, n) に対して，$(m, n) = (a, b) \odot (x, y)$ となるような点 (x, y) が存在するための (a, b) に関する条件を求めよ．また，存在する場合に，(x, y) を a, b, m, n で表せ．

2　正三角形 ABC がある．頂点 A から出発して，コインを投げるたびに表なら 1 つ右の頂点に進み，裏なら 1 つ左の頂点に進む．n 回コインを投げたとき，頂点 A, B, C にいる確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n とする．

(1)　$n=1, 2$ に対して，p_n, q_n, r_n を求めよ．

(2)　p_n, p_{n-1}, p_{n-2} $(n \geqq 3)$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　p_n を求めよ．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

3　$f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $g(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}x$ とおく．

(1)　最高次の係数が正の 2 次式 $h(x)$ で，$\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \int_{-1}^{1} xh(x)\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)^2\,dx = 1$ を満たすものを求めよ．

(2)　上の関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ と，定数 a, b, c に対して $p(x) = af(x) + bg(x) + ch(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)^2\,dx$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)^2\,dx = 1$ を満たす 2 次式 $p(x)$ のうちで，定数項が最大となるものを求めよ．

4　微分可能な関数 $f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ 上で考え，次の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)^2 \cos 2x\,dx = -\int_0^{\pi} f(x)f'(x) \sin 2x\,dx$ であることを示せ．

(2)　$F(x) = f(x)\sin x$ とおくとき，次の 2 つの積分の大小を調べよ．

$$\int_0^{\pi} F'(x)^2\,dx\ ,\ \int_0^{\pi} F(x)^2\,dx$$

(3)　上の 2 つの積分が等しく，さらに $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ であるとする．このとき，$f(x)$ を求めよ．

♠ 医学部以外

✎注：工学部 **1**〜**4**，生物資源学部 **1**, **2**, **5**, **6**，教育学部 **1**, **2** 必答・(**3**, **7**) か (**6**, **8**) から 1 組選択.

1　医学部 **1** と同じ.

2　2 行 2 列の正方行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ．

（1）　$A^2 - 4A + 3E = O$ であることを示せ．ただし，E は単位行列，O は零行列である．

（2）　$A^{n+1} - A^n = 3^n(A - E)$ であることを示せ．

（3）　A^n を求めよ．

3　医学部 **3** と同じ．

4　医学部 **4** と同じ．

5　実数 $a \geqq 0$ に対して，関数 $y = x^2 + a$ のグラフと関数 $x = y^2 + a$ のグラフを考える．

（1）　2 つの曲線が接するときの a の値を求めよ．

（2）　2 つの曲線の距離を表す関数 $d(a)$ を求めよ．

6　$y = \cos x$ のグラフと，点 $(0,\ 1)$ と $(2\pi,\ 1)$ を結ぶ線分で囲まれた領域を A とする．

（1）　領域 A を直線 $y = 1$ の周りに回転して得られる立体の体積 X を求めよ．

（2）　領域 A をそれぞれ $y = 0$ と $y = -1$ の周りに回転して得られる立体の体積を $Y,\ Z$ とするとき，$X,\ Y,\ Z$ の間の大小関係を調べよ．

7　実数 a に対して，関数 $y = -x^2 + a$ のグラフと円 $x^2 + y^2 = 2$ を考える．

（1）　2 つの曲線が接するときの a の値を求めよ．

（2）　2 つの曲線の距離を表す関数 $d(a)$ を求めよ．

8　滑らかな曲線 C を考える．C 上の，x 軸，y 軸上にない点 P に対して，x 軸，y 軸上への垂線の足をそれぞれ Q, R とする．

（1）　曲線 C の軸上にない任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ で，曲線 C への法線が線分 QR を 2 等分するとき，変数 $x,\ y$ の満たす微分方程式を求めよ．

（2）　曲線 C が点 $(1,\ 2)$ を通るとき，C を図示せよ．

出題範囲と難易度

♣ 医学部

- **1** 基本 **代幾** 行列
- **2** 標準 **基解** **微積** 数列（漸化式）・数列の極限
- **3** 標準 **基解** 積分法（定積分の計算）
- **4** 標準 **微積** 積分法（定積分の計算）

♣ 医学部以外

- **1** 基本 **代幾** 行列
- **2** 基本 **代幾** 行列（ n 乗の計算）
- **3** 標準 **基解** 積分法（定積分の計算）
- **4** 標準 **微積** 積分法（定積分の計算）
- **5** 標準 Ⅰ 2 次関数
- **6** 基本 **微積** 積分法の応用（体積）
- **7** 標準 Ⅰ 図形と方程式（放物線と円）
- **8** 基本 **微積** 微分方程式

略解

◇ 医学部

1 (1) $m = ad + bc + ac,\ n = bd - ac$

(2) $a^2 + ab + b^2 \fallingdotseq 0,\ (x,\ y) = \left(\dfrac{bm - an}{a^2 + ab + b^2},\ \dfrac{am + (a + b)n}{a^2 + ab + b^2}\right)$

2 (1) $p_1 = 0,\ q_1 = r_1 = \dfrac{1}{2},\ p_2 = \dfrac{1}{2},\ q_2 = r_2 = \dfrac{1}{4}$

(2) $p_n = \dfrac{1}{2}(p_{n-1} + p_{n-2})\ (n \geqq 3)$

(3) $p_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(4) $\dfrac{1}{3}$

3 (1) $h(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$

(2) $a^2 + b^2 + c^2$

(3) $p(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(-5x^2 + 3)$

4 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} F'(x)^2\,dx \geqq \int_0^{\pi} F(x)^2\,dx$

(3) $f(x) = 1$

◇ 医学部以外

1 医学部 **1** と同じ.

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $A^n = \begin{pmatrix} 2 - 3^n & 2 \cdot 3^n - 2 \\ 1 - 3^n & 2 \cdot 3^n - 1 \end{pmatrix}$

3 医学部 **3** と同じ.

4 医学部 **4** と同じ.

5 (1) $a = \dfrac{1}{4}$

(2) $d(a) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(a - \dfrac{1}{4}\right) & \left(a \geqq \dfrac{1}{4}\right) \\ 0 & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$

6 (1) $X = 3\pi^2$

(2) $Y < X < Z$

7 (1) $a = \pm\sqrt{2},\ \dfrac{9}{4}$

(2) $d(a) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4a - 1}}{2} - \sqrt{2} & \left(a \geqq \dfrac{9}{4}\right) \\ 0 & \left(-\sqrt{2} < a \leqq \dfrac{9}{4}\right) \\ -a - \sqrt{2} & (a \leqq -\sqrt{2}) \end{cases}$

8 （1）　$y' = -\dfrac{x}{y}$

（2）　$C : x^2 + y^2 = 5$