◀2012 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

2 2 次の正方行列 A, B はそれぞれ

$$A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$$

をみたすものとする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，E は 2 次の単位行列を表すものとする.

(1)　行列 A, B, A^2, B^2 を求めよ.

(2)　$(AB)^3=E$ であることを示せ.

(3)　行列 A から始めて，B と A を交互に右から掛けて得られる行列

$$A,\ AB,\ ABA,\ ABAB,\ \cdots\cdots,$$

および行列 B から始めて，A と B を交互に右から掛けて得られる行列

$$B,\ BA,\ BAB,\ BABA,\ \cdots\cdots,$$

を考える．これらの行列の内で，相異なるものをすべて成分を用いて表せ.

3 実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える．以下の問いに答えよ.

(1)　この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ.

(2)　この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ.

4 p と q はともに整数であるとする．2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α, β を持ち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ をみたしているとする．このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する．以下の問いに答えよ.

(1)　a_1, a_2, a_3 は整数であることを示せ.

(2)　$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ.

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい.

5 いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える.

（試行 T）　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，
箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる.

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個が入っているとき，以下の問いに答えよ.

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

(1)　試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(2)　試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ．

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ．

♠ 文系学部

1　原点を O とする座標空間に，3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 0,\ 2)$, C$(-2,\ 1,\ 3)$ がある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　△ABC において，∠B は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ．

(2)　点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする．点 H の座標を求めよ．

(3)　△OAH の面積を求めよ．

2　関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える．曲線 $C:y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本持つことを示せ．

(2)　(1) において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ P$(p,\ f(p))$, Q$(q,\ f(q))$ とする（ただし $p<q$）．このとき，点 P と点 Q は点 A$(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ．

(3)　$t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の間の距離の最小値を求めよ．また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ．

3　100 人の団体がある区間を列車で移動する．このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした．以下の問いに答えよ．

(1)　x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ．

$\dfrac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない．

(2)　購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする．このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ．

(3)　購入した乗車券は余ってもよいものとする．このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A, B をそれぞれ何セットずつ購入するときか．またそのときの購入金額はいくらか．

4　理系学部の **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　III　積分の応用
2. 標準　C　行列
3. やや難　I　２次方程式
4. やや難　III　数列の極限
5. 標準　A　確率

♣ 文系学部

1. 標準　B　空間図形
2. 標準　II　微分積分
3. 標準　I　整数
4. 標準　A　確率

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 理系学部

1　$6\sqrt{3}\pi+\dfrac{16}{3}\pi^2$

2 (1) $A=\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(2) 証明は省略

(3) $\begin{pmatrix}5&3\\-8&-5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}9&7\\-13&-10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-11&-8\\15&11\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}-10&-7\\13&9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}6&5\\-7&-6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

3 (1) $-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$

(2) $-\dfrac{1}{5}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $(p,q)=(1,-1),\ (-1,-1)$

5 (1) $p_1=\dfrac{1}{6}$, $p_2=\dfrac{2}{3}$, $p_3=\dfrac{1}{6}$

(2) $q_1=\dfrac{5}{18}$, $q_2=\dfrac{11}{18}$, $q_3=\dfrac{1}{9}$

(3) $\dfrac{11}{108}$

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $\mathrm{H}\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 最小値 $\dfrac{10\sqrt{6}}{9}$　$(p,q)=\left(-1-\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-1-\dfrac{\sqrt{15}}{3},\ -1+\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$

3 (1) 証明は省略

(2) (セット A, セット B) = (1, 31), (4, 24), (7, 17), (10, 10), (13, 3)

(3) A を 13 セット, B を 3 セット

購入金額は, 6900 円

4　理系学部 **5** と同じ.

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto