◀2008 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく．ただし，e は自然対数の底とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ．

(2)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ．

2　1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする．よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする．抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ．

(2)　2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ．

(3)　得点の期待値を求めよ．

3　△OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする．3 つの三角形 △OAP, △OBP, △ABP の面積をそれぞれ a, b, c とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b, c を用いて表せ．

(3)　3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする．点 P を中心とし，3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

4　$a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x\ (x>0)$, $g(x)=\sqrt{x-1}\ (x\geqq 1)$ とおく．2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ．

(2)　2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ．

(3)　2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

5　いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　半径 3 の円の 1 つを R とする．円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく．ただし，$0<\theta<\pi$ とする．このとき，$\sin\theta$ を求めよ．

(2)　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(3)　配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ．

♠ 文系学部

1　自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく．ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a_1 = \dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ.

(2)　$a_n = \dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ.

(3)　$a_n < \dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ.

2　放物線 $C : y = x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ．

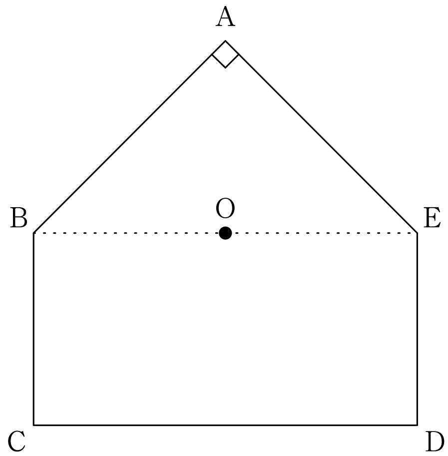
(2)　y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ．

3　図のような五角形 ABCDE（角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形）において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする．線分 BE の中点を O とする．また，5 枚のカードがあり，それぞれに A, B, C, D, E と書いてある．カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す．この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする．たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i = \mathrm{B}$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ の内積が 1 である確率を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする．このとき，$q_1 q_2 \cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ．



4　放物線 $C : y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ をみたす実数 a_1 を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする．この操作を繰り返してできる数列を $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ とする．このとき，すべての n に対して，$a_n > 1$ を示せ．

(3)　$b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < {b_n}^2$ を示せ．

(4)　$a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を 1 つ求めよ．ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.301 として計算してよい．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　$\boxed{\text{III}}$ 関数・微分法の応用

2 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

3 標準　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル

4 標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用

5 やや難　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数

♣ 文系学部

1 やや難　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数・$\boxed{\text{B}}$ 数列

2 基本　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

3 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ ベクトル

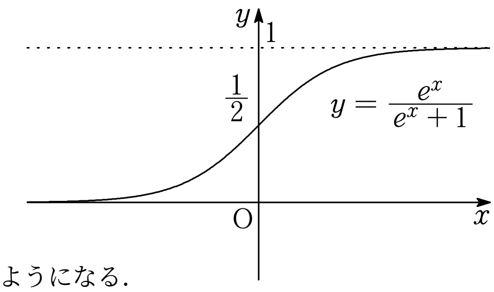
4 やや難　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分・$\boxed{\text{B}}$ 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1)　増減表は，次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	(1)



漸近線は，$y = 0$, $y = 1$ であり，グラフは，右図のようになる．

(2)　$f^{-1}(x) = \log \dfrac{x}{1 - x}$　$(0 < x < 1)$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right) - f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\} = -1$

2 (1)　得点が 1 である確率：$\dfrac{k-1}{90}$

得点が 10 である確率：$\dfrac{k+9}{90}$

(2)　$\begin{cases} n \leqq k \text{ のとき，} & \dfrac{k-1}{90} \\ n > k \text{ のとき，} & \dfrac{k+9}{90} \end{cases}$

(3)　$\dfrac{-k^2 + 10k + 99}{18}$

3 (1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a + b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}} + a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a + b - c}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

4 (1)　$a = 1 - \log 2$,　$\mathrm{P}(2, 1)$,　$l : y = \dfrac{1}{2}x$

(2)　証明は省略

(3)　$\dfrac{2}{e} - \dfrac{2}{3}$

5 (1)　$\sin\theta = \dfrac{24}{25}$

(2)　証明は省略

(3)　4

◇ 文系学部

1 （1）　証明は省略

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

2 （1）　$x+2py-2p^3-p=0$

（2）
$$\begin{cases} a \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき，}\quad 1\text{ 本} \\ a > \dfrac{1}{2} \text{ のとき，}\quad 3\text{ 本} \end{cases}$$

3 （1）　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$

（2）　$\dfrac{7}{25}$

（3）　$1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

4 （1）　$a_2=\dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1}$

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

（4）　$n=7$