◀1999 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

注：**1**〜**3** 必答・(**4**〜**6**) から 1 題選択，(**7**〜**9**) から 1 題選択．計 5 題を解答．

1　m を 2 以上の自然数，e を自然対数の底とする．

(1)　方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ をみたす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ．またその値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ．

(2)　$x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ．

(3)　a_m を (2) で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{\log a_m}{m \log m}$ を求めよ．

2　長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える．この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を ℓ とする．直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし，以下の問いに答えよ．

(1)　直円錐の展開図を用いて ℓ の長さを求めよ．

(2)　ℓ 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする．$\angle \mathrm{AOQ} = \theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(3)　P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする．$0^\circ < \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ．

3

(1)　実数 $k \geqq 0$ に対し，

$$\int_0^{2\pi} \left\{ y\left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right) - \left(x\cos\theta + \frac{1}{2}x^2\right)^2 \right\} \cos\theta \, d\theta = 2k\pi$$

をみたす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ．

(2)　(1) で求めた曲線と直線 $y = a$ との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ．

4　関数 $f(x) = 1 - x^2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(a) = a$ をみたす正の実数 a を求めよ．

(2)　a を (1) で求めた実数とする．$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$\left|f(x) - f(a)\right| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}\left|x - a\right|$ となることを示せ．

(3)　a を (1) で求めた実数とする．
$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として，

$$x_{n+1} = f(x_n),\quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える．すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば，$x_1 = a$ であることを示せ．

5　実数 a, b は $0 < a < b$ をみたすとする．次の 3 つの数の大小関係を求めよ．

$$\frac{a+2b}{3},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

6　次の (1), (2) では，それぞれ，その目的を実行するための BASIC によるプログラムのはじめの部分が与えられている．方針を記述してから，プログラムの残りの部分を完成せよ．ただし，変数 A(1), A(2) 等には座標 a_1, a_2 等が入力されるものとする．

注意：(1) のプログラムでは配列を表すために DIM 文を使っているが，DIM 文を使わないプログラムを作成してもよい．そのときは，行番号 10 の文は消去し，行番号 20, 30 の文は

```
20  INPUT A1, A2
30  INPUT P1, P2
```

で置き換えるものとする．(2) についても，同様である．

(1)　座標平面上の原点 O と異なる点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ について，任意の点 $\mathrm{P}(p_1, p_2)$ から直線 OA への距離を表示すること．

```
10  DIM A(2), P(2)
20  INPUT A(1), A(2)
30  INPUT P(1), P(2)
```

(2)　点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ を座標平面上の相異なる点とし，直線 AB で平面を二分する．点 $\mathrm{P}(p_1, p_2)$, $\mathrm{Q}(q_1, q_2)$ がこの直線の同じ側にあるときは 1 を，異なる側にあるときは -1 を，P, Q の少なくとも一方がこの直線上にあるときは 0 を表示すること．ただし，ある点と直線との距離が，与えられた正数 0.00001 より小さいときはその点は直線上にあるとみなすことにする．

```
10  DIM A(2), B(2), P(2), Q(2)
20  EPS=0.00001
30  INPUT A(1), A(2)
40  INPUT B(1), B(2)
50  INPUT P(1), P(2)
60  INPUT Q(1), Q(2)
```

7　A, B の 2 名で次のゲームを行う．A, B はそれぞれ表に 1 から n までの数字がひとつずつ書かれた n 枚のカードを持っている（裏には何も書かれていない）．A は自分のすべてのカードを表を下にして並べる．B は，A が並べたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつ並べる．次に A のカードを表向きにし，B は数字が一致したカードの枚数だけ得点を得る．確率変数 X を B が 1 回のゲームで得る点数とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$n=5$ のとき確率 $P(X=2)$ を求めよ．

(2)　B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする．

$$p=\sum_{k=1}^{n} a_k P(X=k)$$

と表すとき，a_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ を求めよ．

(3)　期待値 $E(X)$ を求めよ．

8　k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α, β $(\alpha \neq \beta)$ とする．i を虚数単位として，次の問いに答えよ．

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ．

(2)　複素数平面において，複素数 α, β, i を表す点をそれぞれ A, B, P とする．$\angle\mathrm{APB}$ が直角になるような k の値を求めよ．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

9　大きさ 1 の空間ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2},\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

をみたすように与えられているとする．また，空間ベクトル $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\quad \vec{c}\cdot\vec{d}=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{e}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\quad \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\quad \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\quad \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

をみたすとき，点 $\mathrm{D}\left(\vec{d}\right)$，$\mathrm{E}\left(\vec{e}\right)$，$\mathrm{F}\left(\vec{f}\right)$ および原点 O について，次の問いに答えよ．

(1)　$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ となるような実数 x, y, z を求めよ．同様に $\vec{f}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

(2)　ベクトル $\vec{d}, \vec{f}, \vec{d}-\vec{f}$ の大きさを求めよ．

(3)　三角形 ODF の面積を求めよ．

(4)　四面体 ODEF の体積を求めよ．

♠ 文系学部

➾注：**1**〜**2** 必答・(**3**〜**5**) から 1 題選択, (**6**〜**8**) から 1 題選択．計 4 題を解答．

1　k を実数として，$f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$ とおく．方程式 $f(x)=0$ が実数解 α, β（$\alpha \leqq \beta$）をもつとき，次の問いに答えよ．

(1)　α, β が $\alpha \leqq 1 \leqq \beta$ をみたすように k の値の範囲を定めよ．

(2)　(1) の場合に $f(x)$ の最小値がとりうる値の範囲を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=pa_n-p,\quad b_1=q,\quad b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$$

と定める．

(1)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする．m を正の偶数とするとき，第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ．

4　理系学部 **5** と同じ．

5　理系学部 **6** と同じ．

6　理系学部 **7** と同じ．

7　理系学部 **8** と同じ．

8　理系学部 **9** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 やや難 III 数列の極限・微分法の応用
2 標準 II 三角関数
3 標準 III 積分法の応用
4 やや難 III 数列の極限・C 方程式の近似解
5 標準 A 不等式の証明
6 標準 B 算法とコンピュータ
7 標準 B 確率分布
8 標準 B 複素数と複素数平面
9 標準 B ベクトル（空間）

♣ 文系学部

1 標準 I ２次関数
2 標準 II 三角関数
3 標準 A 数列
4 標準 A 不等式の証明
5 標準 B 算法とコンピュータ
6 標準 B 確率分布
7 標準 B 複素数と複素数平面
8 標準 B ベクトル（空間）

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 理系学部

1 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m}=-1$

2 （1） $2\sqrt{2}$

（2） $\mathrm{CP}^2=\dfrac{4}{1+\sin\theta}$

（3） 最大値：$\dfrac{32}{27}$

3 （1） $xy-x^3=2k$

（2） $\begin{cases} k=0 \text{ のとき} & a\leqq 0 \\ k\neq 0 \text{ のとき} & a<3\sqrt[3]{k^2} \end{cases}$

4 （1） $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

5 $\sqrt{ab}<\dfrac{a+2b}{3}<\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$

6 （1） 方針は省略．プログラムの続きは，下記の通り．

```
40  C=SQR (A(1)^2+A(2)^2)
50  F=ABS (A(2)*P(1)-A(1)*P(2))
60  PRINT "キョリハ" ; F/C
70  END
```

（2） 方針は省略．プログラムの続きは，下記の通り．

```
70   C=SQR((B(2)-A(2))^2+(B(1)-A(1))^2)
80   X=P(1); Y=P(2):  GOSUB 200
90   F1=F
100  IF D<ESP THEN 160
110  X=Q(1):  Y=Q(2):  GOSUB 200
120  F2=F
130  IF D<ESP THEN 160
140  IF F1*F2>0 THEN 170
150  GOTO 180
160  PRINT "0":  GOTO 190
170  PRINT "1":  GOTO 190
180  PRINT "-1"
190  END
200  F=(B(2)-A(2))*(X-A(1))-(B(1)-A(1))*(Y-A(2))
210  D=ABS (F)/C
220  RETURN
```

7 （1） $P(X=2)=\dfrac{1}{6}$

（2） $a_k=\dfrac{k}{n}$

（3） $E(X)=1$

❽ (1) $\begin{cases} k<0,\ 3<k \text{ のとき} & 4k^2-6k+2 \\ 0<k<3 \text{ のとき} & 6k+2 \end{cases}$

(2) $k=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ 1$

❾ (1) $x=\dfrac{3}{2},\ y=1,\ z=\dfrac{1}{2}$

$\vec{f}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

(2) $\left|\vec{d}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\quad \left|\vec{f}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{2},\quad \left|\vec{d}-\vec{f}\right|=\sqrt{2}$

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

◇ 文系学部

❶ (1) $\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 2$

(2) $f(x)$ の最小値を m とすると，$-\dfrac{16}{15}\leqq m\leqq -\dfrac{1}{4}$

❷ 理系学部 ❷ と同じ．

❸ (1) $\begin{cases} p=1 \text{ のとき} & S_n=\dfrac{1}{2}n(3-n) \\ p\neq 1 \text{ のとき} & S_n=\dfrac{p(p-1)n-(p^n-1)}{(p-1)^2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} p=1 \text{ のとき} & T_m=q\{3-(3m-2)q\} \\ p\neq 1 \text{ のとき} & T_m=\dfrac{2p(p-1)q-p^{\frac{3m-4}{2}q}(p^{2q}-1)}{(p-1)^2} \end{cases}$

❹ 理系学部 ❺ と同じ．

❺ 理系学部 ❻ と同じ．

❻ 理系学部 ❼ と同じ．

❼ 理系学部 ❽ と同じ．

❽ 理系学部 ❾ と同じ．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto