◀1998 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

注：1～3 必答・(4～6) から 1 題選択，(7～10) から 1 題選択．計 5 題を解答．

1 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x)=e^x f(x)$ とおく．

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件 (A)「すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である」

をみたすものの例をあげよ．

(2) 関数 $f(x)$ が

条件 (B)「すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である」

をみたすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ．

(3) 関数 $f(x)$ が (1) の条件 (A) をみたすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ．

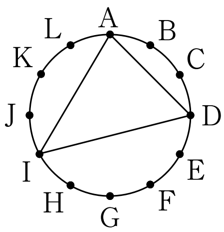
(4) 関数 $f(x)$ が (1), (2) の条件 (A), (B) をともにみたすとする．

① $f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ．

② ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ となることを示せ．

2 右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている．これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形がえられる．たとえば，A, D, I を選べば，図のような三角形がえられる．

このとき，次の問いに答えよ．



(1) 正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ．

(2) 二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ．

(3) 直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ．

(4) 3 点を選んでえられる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか．

3 平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて $x=\sin t-t\cos t,\ y=\cos t+t\sin t\ (0\leqq t\leqq\pi)$ で与えられている．

(1) 曲線 C の長さを求めよ．

(2) 曲線 C 上の各点 P において，P における接線と P で直交する直線を考える．この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は，P を動かすときどんな図形を描くか．

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ．

(4) 曲線 C と y 軸および直線 $y=-1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

4

(1) $x\geqq y\geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x}\geqq\dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ．

(2) ① 不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|}\geqq\dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ．

② ① の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ．

5

(1)　自然数 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ．

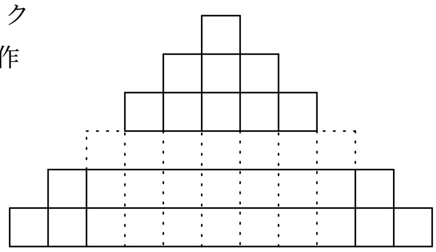
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい．

①　$m=2, 3, 4$ のとき，どのようにタイル張りすれば良いか図示せよ．

②　一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ．

(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る．このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る．この台を真横から見たとき右図のように見えたという．ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である．このとき台全体の体積を求めよ．



6　右図のような四角形 ABCD において，直線 AB と直線 CD の交点 E，直線 BC と直線 AD の交点 F，直線 BD と直線 EF の交点 R，直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする．

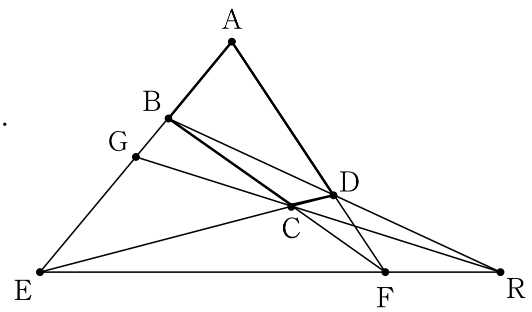
(1)　$\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}$ が成り立つことを示せ．

(2)　G が AE の中点で，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}=2$ であるとき，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{CD}=b$ とおく．次の条件をみたす x, y, z の値を求めよ．

①　$\mathrm{EB}=xa$

②　$\mathrm{EC}=yb$

③　四角形 ABCD が円に内接するとき，$a=zb$



7　辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする．（ただし，$m, n>0$ とする．）

(1)　①　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

②　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうかを調べよ．

(2)　①　点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの m, n の関係を求めよ．

②　このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

③　G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ．

8　k を実数とするとき，方程式 $x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$ の解を z_1, z_2, z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす．

(1)　z_1, z_2, z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ．

(2)　z_1, z_2, z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ．

(3)　3 点 z_1, z_2, z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とする．$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ およびそれらと共役な点 $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を求めよ．

9　3 桁の自然数 $N = 100a + 10b + c$ (a, b, c は，$1 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b \leqq 9,\ 0 \leqq c \leqq 9$ をみたす整数）を考える．

(1)　平方数かつ奇数である N で，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接するようなものをすべて求めよ．

(2)　命題「 N および a が平方数のとき 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と接する．」は正しいか．正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ．

(3)　ある N について，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは座標が整数である相異なる 2 点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる．このときの N を求めよ．

10

(1)　平面上に半径が R, r ($R > r$) の 2 円があり，それらの中心間の距離が l であるとする．これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ．

(2)　座標平面上で x 軸を準線とし，定点 $\mathrm{A}(0, a)$ を通る放物線について考える．ただし，$a > 0$ とする．

①　そのような放物線の焦点 $\mathrm{F}(s, t)$ の全体はどのような図形を描くか．

②　x 軸上にない点 $\mathrm{P}(p, q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ．

♠ 文系学部

注：1～2 必答・(**3～5**) から 1 題選択，(**6～8**) から 1 題選択．計 4 題を解答．

1　放物線 $y = x^2 - 2px$ 上の点 $(t, t^2 - 2pt)$ における接線を y 軸方向に b だけ平行移動した直線を $l(t, b)$ とする．

(1)　直線 $l(t, b)$ の方程式を求めよ．

(2)　この放物線と直線 $l(t, b)$ とが，x 座標が正の 2 点で交わるための t, b の範囲を求めよ．

(3)　放物線と直線 $l(t, b)$ とが 2 点で交わるとき，これらが囲む図形の面積 S を求めよ．

(4)　(3) の図形の面積 S を直線 $x = u$ で 2 等分したい．u を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　理系学部 **4** と同じ．

4　理系学部 **5** と同じ．

5　次の BASIC によるプログラムを実行するとき，以下の問いに答えよ．

```
10    INPUT N
20    S=0
30    M=2*INT(N/2)+1
40    FOR K=1 TO M STEP 2
50    X=N-K*INT(N/K)
60    IF X>0 THEN GOTO 80
70    S=S+K
80    NEXT K
90    PRINT S
100   END
```

(1)　入力が 12 のとき，出力はいくらか．

(2)　出力が 1 となるような自然数の入力はどのような数か．

(3)　範囲 $2 \leqq \mathtt{N} \leqq 50$ の自然数 N を入力するとき，出力が 1 より大きな奇数となるものをすべて求めよ．

6　辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点 R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする．（ただし，$m, n>0$ とする.）

(1) ①　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

②　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を求めよ．

③　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうかを調べよ．

(2) ①　$m=n$ のとき点 P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ．

②　このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ．

③　G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ．

7　k を正の実数とするとき，方程式 $x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$ の 3 個の解を z_1, z_2, z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす．

(1)　$x=1$ は上の方程式の解であるかどうかを調べよ．

(2)　3 点 z_1, z_2, z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ．

(3)　3 点 z_1, z_2, z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ．

(4)　3 点 z_1, z_2, z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転してえられる 3 点を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とする．$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ およびそれらと共役な点 $\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}, \overline{\omega_3}$ とが，原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ（$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$）の値を求めよ．

8　1 から n までの数字を書いた玉がそれぞれ 2 個ずつ，全部で $2n$ 個入っている袋がある．この袋から 2 個の玉を同時に取り出すことを考える．取り出した玉の数字の大きい方を X，小さい方を Y とする．ただし，同じ数字のときはその数字を X および Y（すなわち $X=Y$）とする．

(1)　確率 $P(X \leqq k)$ および $P(Y \geqq k)$（$k=1, 2, \cdots\cdots, n$）を求めよ．

(2)　確率 $P(X=k)$ および $P(Y=k)$（$k=1, 2, \cdots\cdots, n$）を求めよ．

(3)　$n=4$ のとき $X-Y$ の期待値 $E(X-Y)$ を求めよ．

(4)　一般の n について $X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 ｜ややや難｜ [III] 微分法

2 ｜標準｜ [I] 場合の数

3 ｜標準｜ [III] 積分法の応用

4 ｜標準｜ [A] 不等式の証明

5 ｜標準｜ [A] 数列

6 ｜標準｜ [B] 平面図形

7 ｜標準｜ [B] ベクトル（空間）

8 ｜標準｜ [B] 複素数と複素数平面

9 ｜標準｜ [A] 整数問題

10 ｜標準｜ [C] いろいろな曲線

♣ 文系学部

1 ｜標準｜ [II] 微分積分

2 ｜標準｜ [I] 場合の数

3 ｜標準｜ [A] 不等式の証明

4 ｜標準｜ [A] 数列

5 ｜標準｜ [B] 算法とコンピュータ

6 ｜標準｜ [B] ベクトル（空間）

7 ｜標準｜ [B] 複素数と複素数平面

8 ｜標準｜ [B] 確率分布

略解

◇ 理系学部

1 (1) $f(x)=\sin 2\pi x$

(2) 証明は省略

(3) $F(x+n)=e^nF(x)$

(4) ① 証明は省略

② 証明は省略

2 (1) 4 通り

(2) 52 通り

(3) 60 通り

(4) 12 個

3 (1) $\dfrac{\pi^2}{2}$

(2) 半円 $x^2+y^2=1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$

(3) $-\dfrac{\pi}{2}$

(4) $S=\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{2}$

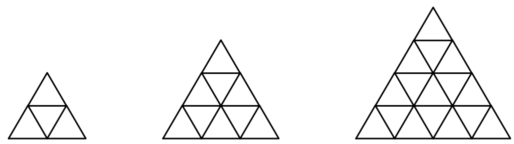
4 (1) 証明は省略

(2) ① 証明は省略

② $x,\ y,\ z$ のうち，少なくとも 2 つが 0 であること

5 (1) 証明は省略

(2) ① 右図



$m=2$　　$m=3$　　$m=4$

② m^2 枚

（理由：タイルと 1 辺の長さが m の正三角形は，

相似比が $1:m$ だから，面積比は $1:m^2$）

(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{12}n(2n-1)(2n+1)$

6 (1) 証明は省略

(2) ① $x=2$

② $y=6$

③ $z=\sqrt{7}$

7 (1) ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$，　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$

② $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RS}}$

(2) ① $m=n$

② $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

③ 証明は省略．半径は $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

8 （1） $k=0, 1$

（2） $k=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

（3） $k=\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，　$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{6}\pi$

9 （1） $N=121, 169, 441, 961$

（2） 正しくない（反例：$a=1, b=9, c=6$）

（3） $N=360$

10 （1） $R-r\leqq l\leqq R+r$

（2） ① A を中心とする半径 a の円から原点を除いた部分

② $(p, q)=(0, a)$ または $4aq\geqq p^2$ $(p\neq 0)$

◇ 文系学部

1 （1） $l(t, b)$ ： $y=2(t-p)x-t^2+b$

（2） $0<t$，$0<b<t^2$

（3） $S=\dfrac{4}{3}b^{\frac{3}{2}}$

（4） $u=t$

2 　理系学部 **2** と同じ．

3 　理系学部 **4** と同じ．

4 　理系学部 **5** と同じ．

5 （1） 4

（2） $N=2^n$（n は 0 以上の整数）

（3） $3^2, 5^2, 7^2, 2\cdot 3^2, 2\cdot 5^2, 2^2\cdot 3^2$ の 6 個

6 （1） ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$，　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$

② $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$

③ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

（2） ① 証明は省略

② $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

③ 証明は省略．半径は $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

7 （1） $x=1$ は方程式の解である

（2） $k=1$

（3） $k=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

（4） $k=\dfrac{1}{2}$，$\theta=90^\circ$

8 （1） $P(X\leqq k)=\dfrac{k(2k-1)}{n(2n-1)}$，　$P(Y\geqq k)=\dfrac{(n-k+1)(2n-2k+1)}{n(2n-1)}$

（2） $P(X=k)=\dfrac{4k-3}{n(2n-1)}$，　$P(Y=k)=\dfrac{4n-4k+1}{n(2n-1)}$

（3） $E(X-Y)=\dfrac{10}{7}$

（4） $E(X+Y)=n+1$