◀1995 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ は $b \fallingdotseq 0$ を満たすとする．行列 A で表される 1 次変換 f によって直線 $y=\alpha x$ はそれ自身に移り，また直線 $y=\beta x$ もそれ自身に移るという．$\alpha \fallingdotseq \beta$ のとき，この 2 つの直線 $y=\alpha x$ と $y=\beta x$ とは直交することを証明せよ．

(2)　正の整数 l, m, n で $(l^m)^n > l^{m^n}$ を満たす組 (l, m, n) をすべて求めよ．

2　xyz 空間内に 4 点 A$(0, 1, 2)$, B$(0, -1, 2)$, C$(0, 0, 1)$, P$(a, b, 3)$ をとる．ただし $a \geqq 0, b \geqq 0$ とする．点 P と点 A, B, C とを結ぶ直線が xy 平面と交わる点をそれぞれ A′, B′, C′ とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 A′, B′, C′ の座標を a, b を用いて表せ．

(2)　三角形 A′B′C′ が正三角形となる点 P $=$ P$_0$ を求めよ．

(3)　点 Q が 3 点 A, B, C を通る半円周 $y^2+(z-2)^2=1$, $x=0$, $z \leqq 2$ 上を動くとき，2 点 P$_0$, Q を結ぶ直線と xy 平面との交点 Q′ の軌跡を求めよ．

3　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{n^2}=1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ の第 1 象限内の部分と，直線 $y=\dfrac{n\sqrt{3}}{2}x$ および x 軸で囲まれる部分を A_n とし，A_n の面積を S_n で表す．また，A$_n$ の内部および周上の点 (x, y) のうち，x と y がともに整数であるものの総数を T_n で表す．次の問いに答えよ．

(1)　T_n, S_n を求めよ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$ を求めよ．

4　曲線 $y=f(x)$ $(x>0)$ 上の任意の点 $(t, f(t))$ における接線は y 軸と点 $(0, (t^2-1)f(t))$ で交わるという．次の問いに答えよ．

(1)　関数 $y=f(x)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ が点 $(1, 1)$ を通るとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

(3)　上に求めた関数 $f(x)$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ．

5　A, B どちらの袋にも，赤球と白球が 1 個ずつ入っているとして，次の操作を行う．2 つの袋から無作為に 1 個ずつ取り出し，同じ色なら 2 つとも A の袋に入れ，異なる色なら 2 つとも B の袋に入れる．この操作をどちらかの袋の球がなくなるまで続けるとする．n を自然数とし，$2n$ 回までこの操作が続いた後，A の袋に 4 個の球が入っている確率を p_n，赤，白の球が 1 個ずつ入っている確率を q_n，同じ色の球 2 個が入っている確率を r_n，球が入っていない確率を s_n とする．次の問いに答えよ．

(1)　p_1, q_1, r_1, s_1 を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n, q_n, r_n, s_n を q_{n-1}, r_{n-1} を用いて表せ．

(3)　p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ．

♠ 文系学部

1 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換 f は，3 点 O$(0,\ 0)$, P$(2,\ 0)$, Q$(1,\ \sqrt{3})$ を頂点とする正三角形を面積 4 倍の正三角形に移すという．次の問いに答えよ．

(1) 行列 A を求めよ．

(2) 原点を中心とし半径 1 の円の 1 次変換 f による像を求めよ．

2 放物線 $y=x^2$ 上の原点と異なる点 A$(a,\ a^2)$ における接線と x 軸との交点を P とし，直線 AP と x 軸の正の向きとのなす角を θ とする．x 軸を，点 P のまわりに正の向きに角 2θ だけ回転させて得られる直線を L とする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 L を表す式を求めよ．

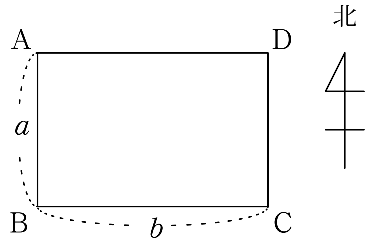
(2) 直線 L と放物線 $y=x^2$ との交点の x 座標の値がいずれも $\dfrac{4a}{1-4a^2}$ より小さくなるような a のとりうる範囲を求めよ．ただし $a \neq \pm\dfrac{1}{2}$ と仮定する．

3 3 次曲線 $C : y=f(x)=x^3-3x$ について次の問いに答えよ．

(1) $t \neq 0$ に対して，C 上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，他の点で C に接する直線を L とする．このとき，この接点の x 座標を t で表し，L の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と，直線 L とで囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

4 a,b を自然数とする．右の図のような南北 am，東西 bm の長方形の部屋 ABCD に 2 辺が 2m, 3m の長方形の板をすきまなく，また，板が互いに重なりあうことのないように敷き詰めたい．次の各場合に，板の敷き詰め方の総数を求めよ．



(1) $a=6,\ b=7$ のとき．

(2) $a=6,\ b=18$ のとき．

(3) $a=8,\ b=9$ のとき．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準　Ⅰ 2 次関数・代幾 1 次変換・基解 指数関数・対数関数
- **2** 標準　代幾 直線の方程式
- **3** 基本　代幾 楕円・微積 関数の極限
- **4** 標準　微積 微分方程式
- **5** やや難　基解 数列・確統 確率

♣ 文系学部

- **1** 標準　代幾 1 次変換
- **2** 標準　Ⅰ 2 次関数・基解 三角関数
- **3** 標準　基解 微分積分
- **4** 標準　確統 場合の数

略解

◇ 理系学部

1 (1)　証明は省略

(2)　$l \geqq 2,\ m = 1,\ n \geqq 2$

2 (1)　$\mathrm{A}'(-2a,\ -2b+3,\ 0),\ \mathrm{B}'(-2a,\ -2b-3,\ 0),\ \mathrm{C}'\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{b}{2},\ 0\right)$

(2)　$\mathrm{P}_0(2\sqrt{3},\ 0,\ 3)$

(3)　$y^2+\sqrt{3}x+3=0,\quad x \geqq -4\sqrt{3},\ z=0$

3 (1)　$T_n = \left[\dfrac{n\sqrt{3}}{2}\right]+3,\quad S_n = \dfrac{n\pi}{3}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

4 (1)　$y' = \dfrac{2-x^2}{x}y$

(2)　$f(x) = x^2e^{\frac{1-x^2}{2}}\ (x>0)$

(3)　最大値：$\dfrac{2}{\sqrt{e}}\ (x=\sqrt{2})$

5 (1)　$p_1 = \dfrac{1}{6},\ q_1 = \dfrac{1}{3},\ r_1 = \dfrac{1}{6},\ s_1 = \dfrac{1}{3}$

(2)

$$\begin{cases} p_n = \dfrac{1}{6}q_{n-1} \\ q_n = \dfrac{1}{3}q_{n-1} \\ r_n = \dfrac{1}{6}q_{n-1}+\dfrac{1}{3}r_{n-1} \\ s_n = \dfrac{1}{3}q_{n-1}+\dfrac{2}{3}r_{n-1} \end{cases}$$

(3)　$p_n = \dfrac{1}{2\cdot 3^n},\ q_n = \dfrac{1}{3^n},\ r_n = \dfrac{n}{2\cdot 3^n},\ s_n = \dfrac{n}{3^n}$

◇ 文系学部

1 (1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

(2)　$x^2+y^2=4$

2 (1)

$$\begin{cases} a \fallingdotseq \pm\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\quad y = \dfrac{4a}{1-4a^2}\left(x-\dfrac{a}{2}\right) \\ a = \pm\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\quad x = \pm\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

(2)　$0<a<\dfrac{1}{2}$

3 (1)　接点の x 座標：$-\dfrac{t}{2},\quad L : y = \dfrac{3(t^2-4)}{4}x+\dfrac{t^3}{4}$

(2)　$S(t) = \dfrac{27}{64}t^4$

4 (1)　3（通り）

(2)　65（通り）

(3)　11（通り）